大气科学
CHINESE JOURNAL OF ATMOSPHERIC SCIENCES

水平相关模型的性质及其在GRAPES三维变分系统中的应用

庄照荣 李兴良 陈春刚

Properties of Horizontal Correlation Models and Its Application in GRAPES 3DVar System

ZHUANG Zhaorong LI Xingliang CHEN Chungang

在线阅读 View online: https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.2010.20107

您可能感兴趣的其他文章 Articles you may be interested in

集合变分混合同化方案在快速循环同化系统中的应用研究
Implementation of Hybrid En-3DVAR Assimilation Scheme in Rapid Cycling Assimilation System
大气科学. 2020, 44(6): 1349 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.2008.20118

非均匀分层下的二阶精度垂直差分方案及其在GRAPES模式中的应用
A Vertical Second-Order Difference Scheme for Non-uniformly Distributed Layers and Its Application in GRAPES Model
大气科学. 2020, 44(5): 975 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.1906.19145

GRAPES Hybrid-3DVar对台风苏迪罗的数值试验
Experiments on Simulation of Typhoon Soudelor with GRAPES Hybrid-3DVar System
大气科学. 2020, 44(5): 1076 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.1911.19193

一种新的线性回归模型及其应用示例
A New Linear Regression Model and Its Application
大气科学. 2019, 43(2): 389 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.1808.18108

基于NLS-4DVar方法的雷达资料同化及其在暴雨预报中的应用
The Radar Data Assimilation System Based on NLS-4DVar and Its Application in Heavy Rain Forecast
大气科学. 2017, 41(2): 321 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.1605.16107

风廓线雷达资料在模式中的同化应用研究
A Study on Assimilation of Wind Profiling Radar Data in GRAPES-Meso Model
大气科学. 2019, 43(3): 634 https://doi.org/10.3878/j.issn.1006-9895.1810.18125

关注微信公众号，获得更多资讯信息

庄照荣, 李兴良, 陈春刚. 2021. 水平相关模型的性质及其在 GRAPES 三维变分系统中的应用 [J]. 大气科学, 45(1): 229−244. ZHUANG Zhaorong, LI Xingliang, CHEN Chungang. 2021. Properties of Horizontal Correlation Models and Its Application in GRAPES 3DVar System [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 45(1): 229−244. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2010.20107

水平相关模型的性质及其在 GRAPES 三维变分系统中的应用

庄照荣 [1,2] 李兴良 [1,2] 陈春刚 [3]

1 国家气象中心，北京 100081
2 中国气象局数值预报中心，北京 100081
3 西安交通大学，西安 710049

摘 要 在变分资料同化中背景误差水平相关模型不仅决定着观测信息传播到格点空间的远近，而且影响着频谱空间中不同尺度上的分析增量信息的多少。本文比较高斯（Gauss）、二阶自回归（Soar）以及尺度叠加高斯模型（Supergauss）在时空域随着空间距离和在频谱域随着不同尺度分布的特点，阐述三种相关模型在区域 GRAPES 三维变分分析（GRAPES-3DVar）中的实施方案，同时通过单点观测试验研究不同相关模型对分析的影响。研究表明 Gauss 相关模型造成分析中小尺度信息的不足，同时当流函数和非平衡的势函数作为分析变量时，依据动力场变量之间的相关关系，会造成风场观测不合理的较大负相关信息。Soar 相关模型能增加分析的中小尺度信息，但在三维变分分析实施中只能采用一阶递归滤波方案，由于计算精度不够会造成风场分析增量异常。当采用 Supergauss 相关模型时，不仅缓解单一高斯模型造成的不恰当风场观测负相关信息，并可增加分析增量的中小尺度信息，同时在递归滤波实施中可获得合理的分析增量。因而 Supergauss 相关模型在三种模型中最适合描述背景误差水平相关，对高分辨率 3DVar 系统的中小尺度分析有益。

关键词 水平相关模型 高斯模型 二阶自回归模型 尺度叠加的高斯模型 递归滤波 三维变分同化
文章编号 1006-9895(2021)01-0229-16 **中图分类号** P435 **文献标识码** A
doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2010.20107

Properties of Horizontal Correlation Models and Its Application in GRAPES 3DVar System

ZHUANG Zhaorong[1,2], LI Xingliang[1,2], and CHEN Chungang[3]

1 *National Meteorological Center*, *Beijing* 100081
2 *Numerical Weather Prediction Center*, *China Meteorological Administration*, *Beijing* 100081
3 *Xi'an Jiaotong University*，*Xi'an* 710049

Abstract The background error correlation function in data assimilation systems is important because it determines the spread distance of observed data in the grid space and the analyzed increments on different scales in the spectral space. Herein, the features in the time-space domain and the spectral space domain are compared among Gaussian function (Gauss), second-order auto-regressive function (Soar), and superposition of Gaussian components (Supergauss). The three correlation functions are then applied in the Global/Regional Assimilation and Prediction System, three-dimensional

收稿日期 2020-01-20；**网络预出版日期** 2020-09-26
作者简介 庄照荣，女，1978 年出生，高级工程师，主要从事资料同化研究，E-mail: zrzhuang@cma.gov.cn
通讯作者 李兴良，E-mail: lixliang@cma.gov.cn
资助项目 国家重点研究发展计划项目 2017YFA0603901、2017YFC1501901、2017YFC1502001
Funded by National Key Research and Development Program of China (Grants 2017YFA0603901, 2017YFC1501901, 2017YFC1502001)

variational data assimilation (GRAPES-3DVar), and their impacts on the analysis increments are analyzed through a single observation test. Research has demonstrated that the Gaussian correlation function contributes to the insufficiency of meso- and small-scale analysis increments. This leads to a larger negative correlation, which is the inverse of the wind field observation according to the correlation among the dynamic field variables when the stream function and unbalanced velocity potential function are used as the control variables. The Soar correlation function can increase the meso- and small-scale analysis increments. However, the less accuracy of a one-order recursive filtering scheme in the 3DVar system causes an abnormal analysis increment of the wind field. Application of the Supergauss correlation function can not only mitigate the inappropriate negative analysis increments of wind observation but also increase the meso- and small-scale power spectrum in analysis increments. Moreover, the analysis increment structure of isotropy with the Supergauss correlation function can be obtained through recursive filter implementation. Thus, the Supergauss correlation function is the most suitable one to describe the background error correlation among the three functions, which is beneficial for the meso- and small-scale analysis in the high-resolution 3DVAR system.

Keywords Horizontal correlation function, Gaussian function, Second-order auto-regressive function, Superposition of Gaussian components, Recursive filter, 3DVar (three-dimensional variational data assimilation)

1 引言

经过几十年的发展，变分同化技术趋于成熟，其中在变分分析中背景误差协方差描述得更精细，更接近模式的实际误差状态。背景误差协方差中单一变量的空间相关关系和不同变量间的相关关系直接决定观测信息传播的程度和变量之间的协调性，对分析质量非常重要。在区域模式变分同化方法中背景误差协方差的水平相关假定各向同性，用相关模型来代替，背景误差协方差矩阵的水平变换部分通过递归滤波来实现，递归滤波精度由滤波近似程度决定。

在变分同化方法中通常都采用一阶滤波迭代多次使递归滤波器逐渐趋近于准高斯滤波器（Vandenberghe and Kuo, 1999; 张华等, 2004; 薛纪善和陈德辉, 2008）。Purser et al.（2003a）比较了变分分析中高斯相关模型及其拉普拉斯算子在递归滤波方案中采用一阶到六阶近似滤波效果的差别，指出变分同化方法中可采用一阶近似滤波 4 次描述背景误差水平相关，但分析增量不满足观测向水平各个方向的传播都一样（等方），效果明显不如四阶近似滤波 1 次，同时指出对于高斯的拉普拉斯算子至少四阶滤波可以获得类似等方的结构。为了提高递归滤波的精度，何光鑫等（2011）、王玉柱等（2014）都在三维变分中采用了高阶递归滤波，研究发现采用四阶近似递归滤波运行 1 次的效果明显好于一阶滤波运行四次的结果。

另一方面，背景误差水平相关模型通常采用高斯或者二阶自回归模型来描述，通过递归滤波来实现相关矩阵和向量的乘积（Vandenberghe and Kuo, 1999; 薛纪善和陈德辉, 2008）。相关研究指出高斯相关模型在小尺度上的功率谱不足（Vandenberghe and Kuo, 1999），对小尺度作用不大。Purser et al.（2003b）构造出不同尺度叠加的高斯模型来代表背景误差水平相关模型，这种模型比单一高斯模型能构建更有益、多样化的协方差形状，而且这种模型也更有利于控制相关模型拉普拉斯算子的旁瓣峰值。何光鑫等（2011）也采用尺度叠加高斯相关模型通过四阶递归滤波能在保持大尺度信息的基础上，获得一些中小尺度的信息。吴洋等（2018）也采用多特征尺度的递归滤波器在分析和预报中获得了更多的 α 中尺度信息。

在变分同化系统中，通常采用高斯及其叠加模型，或二阶自回归模型描述水平相关关系，但对不同相关模型的具体性质分析较少。本文分别从时空域和频谱空间来揭示各类相关模型的特征，同时研究三种不同的相关模型在我国自主研发的全球和区域同化预报系统三维变分分析（GRAPES-3DVar）（张华等, 2004; 庄世宇等, 2005; 薛纪善和陈德辉, 2008）中的应用情况，从本质上说明不同相关模型对分析增量结构及对频谱空间不同尺度上信息的影响。

2 水平相关模型性质

本节分别从时空域和频谱域空间分析高斯相关模型（Gauss）、二阶自回归相关模型（Soar）及尺度叠加高斯模型（Supergauss）的空间和频谱分布特征。

2.1 高斯与二阶自回归相关模型

2.1.1 时空域空间

若高斯$G(r)$和二阶自回归相关模型$S(r)$分别为

$$G(r)=\exp\left(-\frac{r^2}{2L^2}\right), \tag{1}$$

$$S(r)=\left(1+\frac{r}{L}\right)\exp\left(-\frac{r}{L}\right), \tag{2}$$

其中，r 为一维空间两点间的距离，L 为固定水平相关尺度，高斯和二阶自回归相关模型就是随距离变化的模型（图 1a）。这里 L 都取 500 km，从图 1a 中可以看出随着距离的增加，两点之间的相关随指数关系下降，采用同样的水平相关尺度时，二阶自回归相关模型下降幅度更缓慢，观测信息会传播更远。在 GRAPES-3DVar 分析中分析变量的背景误差水平相关采用公式（1）或（2）来描述，而风场（u, v）的水平相关关系和水平相关模型的拉普拉斯算子有关，相关内容见第 3 节，公式（1）和（2）的拉普拉斯算子为

$$G''(r)=\frac{1}{L^2}\left(\frac{r^2}{L^2}-1\right)G(r), \tag{3}$$

$$S''(r)=\frac{1}{L^2}\left(\frac{r}{L}-1\right)\exp\left(-\frac{r}{L}\right). \tag{4}$$

按照 Daley（1991）一维的水平相关尺度L在两种模型中可分别定义为

$$\begin{cases} L^2=-\left.\dfrac{G}{G''}\right|_{r=0}, \\ L^2=-\left.\dfrac{S}{S''}\right|_{r=0}. \end{cases} \tag{5}$$

在变分分析中水平相关尺度一般采用观测余差方法（Hollingsworth and Lönnberg, 1986; Lönnberg and Hollingsworth, 1986; Franke, 1999; Xu et al., 2001; 庄照荣等, 2006b）或 NMC 方法（Parrish and Derber, 1992; Dee and Gaspari, 1996; Ingleby, 2001; 王金成等, 2014; 王亚华等, 2017; 庄照荣等, 2019）统计获得。

高斯和二阶自回归模型归一化的负拉普拉斯算子见图 1b，从图中可以看出两个模型的负拉普拉斯算子存在旁瓣峰值。根据求解极值方法，高斯模型负拉普拉斯的旁瓣峰值在$r_G=\sqrt{3}L$处，旁瓣值相对最大值为$G''(r_G)/G''(0)=-2\exp(-1.5)$，即约−0.45；二阶自回归模型负拉普拉斯的旁瓣峰值在$r_S=2L$处，旁瓣值相对最大值为$S''(r_S)/S''(0)=-\exp(-2)$，即约−0.14。从图 1b 中可以看出在较近距离$r/L<1$ 时，二阶自回归相关模型的负拉普拉斯比高斯相关模型下降更快。随后在r/L距离大于 1 时，高斯模型的负拉普拉斯变号后变化幅度大，旁瓣峰较大；而二阶自回归模型的负拉普拉斯变号后变化缓慢，旁瓣峰值较小。当变分系统中的分析变量为流函数和非平衡的势函数时，负的旁瓣峰值会在观测资料两侧形成负相关的增量。在图 1b 中，高斯模型的旁瓣峰值约为中心峰值的 1/2，对风场分析增量有显著影响。此时，若相关模型负拉普拉斯算子结构和预变换中的风压平衡关系不匹配，将在观测资料稀少的区域产生错误的分析增量，导致后续预报精度下降。3.3 节将给出理论推导验证上述内容。

2.1.2　频谱域空间

从时空域空间来看，水平相关模型的形状影响观测信息传播的远近和大小；而从频谱域空间看，可知不同相关模型在各个尺度上的影响。对公式（1）和（2）进行傅立叶变换，高斯和二阶自回归

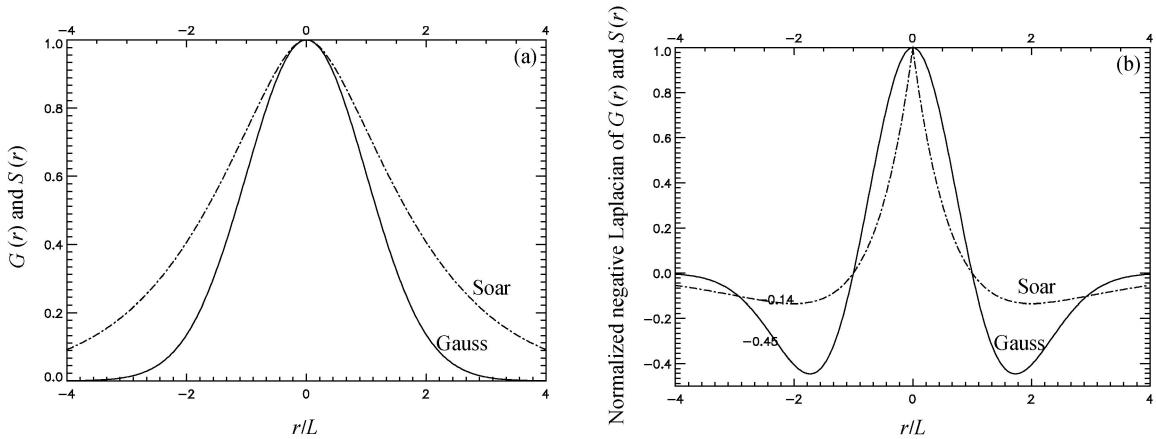

图 1　（a）高斯（Gauss）和二阶自回归（Soar）相关模型及其（b）归一化的负拉普拉斯算子。r 为两点间的距离，L 为固定水平相关尺度

Fig. 1　(a) Gaussian and second-order autoregressive correlation models and (b) their normalized negative Laplacian. r represents distance of two point, L indicates horizontal correlation length

模型的谱响应函数（象函数）为

$$\tilde{G}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}L\mathrm{e}^{-k^2L^2/2},\qquad(6)$$

$$\tilde{S}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t=4L/(1+k^2L^2)^2,\qquad(7)$$

其中，k为频率，高斯和二阶自回归相关模型的谱响应函数随kL（频率和相关尺度的乘积）的变化如图 2a 所示，这里L都取 500 km。从图中可以看出在$kL<3$ 的较大尺度部分，随着波数的增加高斯模型的谱响应函数比二阶自回归的下降缓慢；而在$kL>3$ 的较小尺度部分，高斯模型的谱响应函数快速下降，而二阶自回归的谱响应函数下降速度变缓，功率谱远远大于高斯模型的。因而在变分分析中采用高斯模型描述分析变量的背景误差水平相关时，分析的中小尺度信息缺乏，采用二阶自回归描述水平相关，会增加分析的中小尺度信息。

同样，对于高斯和二阶自回归相关模型的拉普拉斯算子进行傅立叶变换，利用傅立叶变换的积分性质，公式（3）和（4）的谱响应函数为

$$\tilde{G}''(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}G''(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t=(\mathrm{i}k)^2\tilde{G}(k)=-k^2\sqrt{2\pi}L\mathrm{e}^{-k^2L^2/2},\qquad(8)$$

$$\tilde{S}''(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}S''(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t=(\mathrm{i}k)^2\tilde{S}(k)=-4Lk^2/(1+k^2L^2)^2.\qquad(9)$$

从图 2b 以看出，二者拉普拉斯的谱响应函数在低频时（$kL<0.2$）都略小，在 $0.2<kL<3$ 之间时较大；而在$kL>3$ 部分，高斯模型的拉普拉斯谱响应函数下降较快，二阶自回归的下降平缓，二阶自回归的拉普拉斯谱响应函数在较小尺度的功率谱远远大于高斯模型的。

2.1.3 泰勒展开

当水平相关模型用递归滤波来描述时，利用了泰勒展开近似来简化运算。高斯和二阶自回归模型的泰勒展开分别为

$$\exp\left(-\frac{r^2}{2L^2}\right)=1-\frac{r^2}{2L^2}+\frac{r^4}{2!4L^4}-\frac{r^6}{3!8L^6}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{r^2}{2L^2}\right)^n,\qquad(10)$$

$$\left(1+\frac{r}{L}\right)\exp\left(-\frac{r}{L}\right)=1-\frac{r^2}{2!L^2}+\frac{2r^3}{3!L^3}-\frac{3r^4}{4!L^4}+\cdots-\frac{(-1)^n(n-1)r^n}{n!L^n}.\qquad(11)$$

比较（10）和（11）式可以看出，在泰勒展开的一阶近似中，高斯模型和二阶自回归模型等价。

2.2 尺度叠加的高斯模型

二阶自回归模型作为背景误差水平相关模型，在时空域空间其拉普拉斯的分布和频谱空间中小尺度上功率谱的表现上都优于高斯模型，但是在递归滤波的实施上，由于递归滤波精度不够，造成风场分析增量为非各向同性（见 4.2 节）。考虑多元正态分布满足可加性，因而不同尺度高斯模型线性组合也满足正态分布，可利用高斯模型的可加性进行递归运算。通过多尺度高斯模型的叠加来描述背景误差水平相关，缓解采用单一高斯模型作为水平相关模型存在的问题。

2.2.1 时空域空间

若$R(r)$表示水平相关尺度 L 从l_1到l_M的 M 种不同尺度的高斯模型叠加：

$$R(r)=\frac{1}{M}\sum_{l_1}^{l_M}G(r,L)=\frac{1}{M}\sum_{l_1}^{l_M}\exp\left(-\frac{r^2}{2L^2}\right),\qquad(12)$$

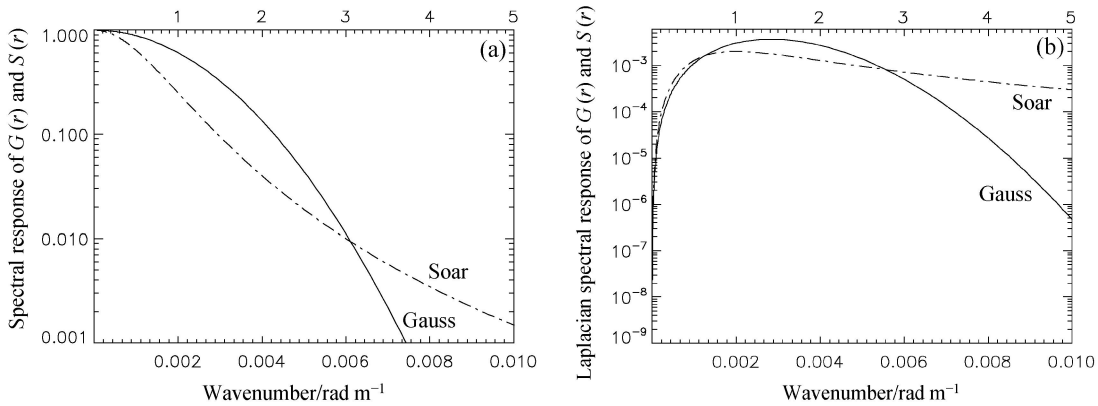

图 2 （a）高斯和二阶自回归相关模型的谱响应函数及其（b）拉普拉斯算子的谱响应函数

Fig. 2 (a) Spectral response functions of Gaussian and second-order autoregressive correlation models and (b) their Laplacian spectral response functions

则尺度叠加高斯模型的拉普拉斯也是高斯模型拉普拉斯尺度叠加后的平均，同样利用傅立叶变换线性性质，它们的谱响应模型也对应各种尺度高斯模型及其拉普拉斯谱响应模型的平均。图 3 为采用 350 km、500 km、850 km 的水平相关尺度的高斯相关模型及其归一化的拉普拉斯算子，可以看出随着水平相关尺度从 850 km 降低到 350 km，高斯及其拉普拉斯模型相关模型形状更窄，说明观测信息传播的更近。当采用以上三种尺度进行尺度叠加后，尺度叠加的高斯模型在近距离可以保持尺度为 500 km 的高斯模型/高斯拉普拉斯算子的形状，而在远距离下降趋势都减缓（Supergauss 表示尺度叠加的高斯模型）。由于不同水平相关尺度的高斯模型拉普拉斯的旁瓣峰值位置不同，因而尺度叠加后的旁瓣峰值也明显变小，三种尺度叠加的高斯模型的归一化负拉普拉斯旁瓣峰值降低到−0.24，而且负拉普拉斯的旁瓣峰值可以采用不同的高斯模型组合进行调节。本文将利用尺度叠加的高斯模型减小旁瓣峰值对风场分析增量的影响，减小在观测稀疏区域对后续模式积分不利的虚假增量。

2.2.2　频谱域空间

对尺度叠加的高斯模型（12）式进行傅立叶变换，由傅立叶变换的线性性质，其谱响应函数为

$$\tilde{R}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}/M\sum_{l_1}^{l_M}L\mathrm{e}^{-k^2L^2/2}. \quad (13)$$

从尺度叠加高斯模型的谱响应函数可以看出（图 4a），当水平相关尺度从 850 km 降低到 350 km，虽然时空域空间观测信息传播的更近，但是在高频部分的功率谱急剧增加，说明水平相关尺度降低后，高频部分的能量更强。尺度叠加的高斯模型谱响应函数在低频部分能和相关尺度为 500 km 的高斯模型功率谱相当，同时在高频部分的功率谱比单一 500 km 高斯模型的功率谱增加很多。对于尺度叠加高斯模型的拉普拉斯算子的谱响应函数也是同样的结论（图 4b）。

3　水平相关模型在变分中的应用

3.1　GRAPES 三维变分分析

GRAPES 区域三维变分分析（GRAPES-3DVar）是求控制变量的目标函数（J）达到极小时的分析场（薛纪善和陈德辉, 2008; 薛纪善等, 2012）：

$$J=0.5\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+0.5(\boldsymbol{HP\Sigma}_u\boldsymbol{Uw}+\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{HP\Sigma}_u\boldsymbol{Uw}+\boldsymbol{d}), \quad (14)$$

其中，$\boldsymbol{w}$ 为控制变量，$\boldsymbol{H}$ 是把大气状态投影到观测空间的线性观测算子，$\boldsymbol{P}$ 是变量间不相关的分析变量（$\delta\psi$、$\delta\chi_u$、$\delta\pi_u$、δq）（流函数、非平衡的势函数、非平衡的无量纲气压和比湿）到模式变量（δu_{a}、δv_{a}、$\delta\pi_{\mathrm{a}}$、δq）（u 风场、v 风场、无量纲气压和比湿）的平衡变换。$\boldsymbol{\Sigma}_u$是由格点上均方根误差构成的对角矩阵。$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}})-\boldsymbol{y}$为新息向量，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}$为背景场，$\boldsymbol{y}$为观测。矩阵$\boldsymbol{U}$是相关系数矩阵的平方根矩阵，分析变量的背景误差协方差矩阵$\boldsymbol{B}_u$为

$$\boldsymbol{B}_u=\boldsymbol{UU}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{VSRS}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}, \quad (15)$$

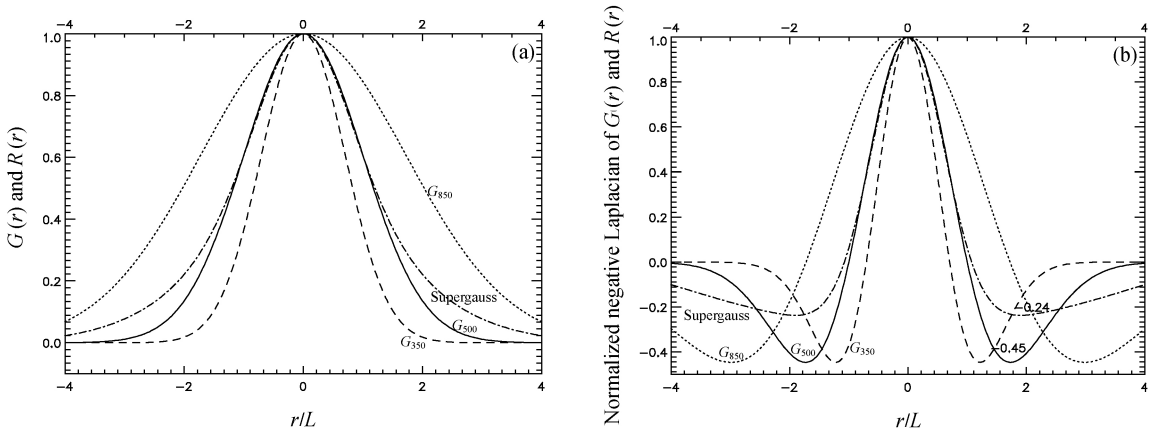

图 3　（a）不同尺度的高斯相关模型和尺度叠加的高斯模型及其（b）归一化的负拉普拉斯算子。G_{350}、G_{500} 和 G_{850} 分别表示相关尺度为 350 km、500 km 和 850 km 的高斯相关模型；Supergauss 表示以上三种尺度叠加的高斯模型

Fig. 3　(a) Gaussian correlation models of different scales, Supergauss correlation model and (b) their normalized negative Laplacians. G_{350}, G_{500}, and G_{850} indicate Gaussian correlation models with horizontal correlation length of 350 km, 500 km and 850 km, respectively; Supergauss represents superposition of Gaussian components with the three horizontal correlation lengths

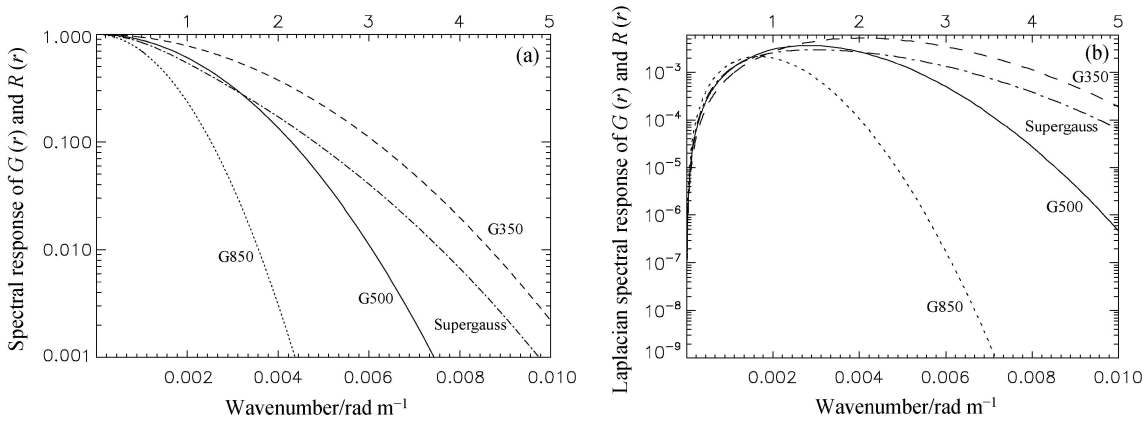

图 4 （a）不同尺度的高斯相关模型和尺度叠加高斯模型的谱响应函数及其（b）拉普拉斯算子的谱响应函数

Fig. 4 (a) Spectral response functions of Gaussian correlation models with different scales, Supergauss correlation model and (b) their Laplacian spectral response functions

其中，$\boldsymbol{V}$为正交垂直模，$\boldsymbol{S}$为垂直模的方差向量，$\boldsymbol{R}$为背景误差水平相关矩阵。背景误差水平相关矩阵与某个向量的乘积可用递归滤波来逼近（薛纪善和陈德辉, 2008; 何光鑫等, 2011）：

$$\boldsymbol{R}=\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}\cdots\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}}_{N/2}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}}_{N/2}, \tag{16}$$

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{F}}$为一次向前一次向后的递归滤波，$\boldsymbol{R}$可以通过$N$次向前/向后的递归滤波来逼近。在 GRAPES-3DVar 系统中，背景误差协方差采用 NMC 方法统计，水平相关关系采用高斯模型来描述，背景误差协方差水平变化部分采用一阶递归滤波算法，根据高斯模型的谱响应与一阶递归滤波的振幅响应因子的关系来确定滤波系数，滤波迭代次数为 10。

3.2 递归滤波方案

据 Purser（2003a）、何光鑫等（2009）和王玉柱等（2014），网格距为dx网格上的差分算子（$\boldsymbol{F}_{(n)}$）为

$$\boldsymbol{F}_{(n)}=1-\frac{a^2}{2}\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{a^4}{2!4}\frac{d^4}{\mathrm{d}x^4}-\frac{a^6}{3!8}\frac{d^6}{\mathrm{d}x^6}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{a^2}{2}\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^n, \tag{17}$$

a为水平相关尺度。比较式（10）和（17），可知（17）式为准高斯型的差分算子。

令$\sigma=a/\delta x$，以上差分算子的谱响应（$\hat{\boldsymbol{F}}_{(n)}$）为

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{(n)}=1+\sigma^2\frac{k^2\delta x^2}{2}+\frac{\sigma^4}{2!}\left(\frac{k^2\delta x^2}{2}\right)^2+\frac{\sigma^6}{3!}\left(\frac{k^2\delta x^2}{2}\right)^2+\cdots+\frac{\sigma^{2n}}{n!}\left(\frac{k^2\delta x^2}{2}\right)^n. \tag{18}$$

可知：

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\boldsymbol{F}}_{(n)}=\exp\left(\frac{a^2k^2}{2}\right). \tag{19}$$

（19）式是高斯模型$\exp\left(-a^2k^2/2\right)$的倒数，也验证了$\boldsymbol{F}_{(n)}$是准高斯型差分算子。定义变量$\psi$的有限中央差分算子$K/\delta x^2$为

$$\frac{K(\psi)_i}{\delta x^2}=-\frac{\psi_{i-1}-2\psi_i+\psi_{i+1}}{\delta x^2}, \tag{20}$$

来近似微分算子$-d^2/\mathrm{d}x^2$，通过傅立叶变换和泰勒展开，可以获得有限中央差分算子谱响应$\hat{\boldsymbol{K}}$和差分网格的关系：

$$\left(k^2\delta x^2\right)^i=\sum_{j\geqslant i}b_{i,j}\hat{\boldsymbol{K}}^j, \tag{21}$$

其中，$b_{i,j}$为准高斯滤波系数。由式（18）、（21）可获得$\hat{\boldsymbol{F}}^*_{(n)}$关于$\hat{\boldsymbol{K}}$的表达式：

$$\hat{\boldsymbol{F}}^*_{(n)}=1+b_{1,1}\frac{\sigma^2}{2}\hat{\boldsymbol{K}}+\left[b_{1,2}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{b_{2,2}}{2!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\right]\hat{\boldsymbol{K}}^2+\cdots+\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{j,n}}{j!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^j\right]\hat{\boldsymbol{K}}^n, \tag{22}$$

对应的，有限差分算子$\boldsymbol{F}^*_{(n)}$可由$\boldsymbol{K}$的 n 次幂组成：

$$\boldsymbol{F}^*_{(n)}=1+b_{1,1}\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{K}+\left[b_{1,2}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{b_{2,2}}{2!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\right]\boldsymbol{K}^2+\cdots+\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{j,n}}{j!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^j\right]\boldsymbol{K}^n. \tag{23}$$

$\left(\boldsymbol{F}^*_{(n)}\right)^{-1}$即为准高斯滤波器，对于一个给定的输入场$\boldsymbol{p}$，准高斯滤波器是对输入场的卷积运算。由（23）式，输出结果$\boldsymbol{s}$近似等于函数$\exp\left(a^2k^2/2\right)$倒数的谱

变换，即：

$$\begin{cases} \boldsymbol{s} = \left(\boldsymbol{F}^*_{(n)}\right)^{-1}\boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{F}^*_{(n)}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p}, \end{cases} \tag{24}$$

上式中，$\boldsymbol{F}^*_{(n)}$是带状对称矩阵，通过 LU 分解，则 $\boldsymbol{F}^*_{(n)} = \boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}$ 为下三角带状矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是上三角带状矩阵，这样通过两步递归运算获得输出场 $\boldsymbol{s}$，即：

$$\begin{cases} \boldsymbol{Aq} = \boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{Bs} = \boldsymbol{q}, \end{cases} \tag{25}$$

则高阶递归滤波的基本表达为

$$\begin{cases} q_i = \left(1 - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)p_i + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j q_{i-j}, \\ s_i = \left(1 - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)q_i + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j s_{i+j}, \end{cases} \tag{26}$$

其中，滤波系数α_j，$j \in [1,n]$，存在 n 阶滤波。利用两个高斯模型的乘积还为高斯模型（高斯函数可分解的性质），即：

$$\exp\left(-\frac{a^2\rho^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{a^2k^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{a^2l^2}{2}\right), \tag{27}$$

其中，$\rho^2 = k^2 + l^2$，为总波数。同时利用傅立叶变换中卷积的性质，两个函数相乘的卷积等于各自卷积再相乘，因而准高斯滤波器可用低阶滤波器多次相乘来近似，即准高斯滤波器的高阶滤波可采用一阶滤波多次向前向后运算来描述，即公式（16）。

研究表明四阶递归滤波运行 1 次的滤波效果明显好于一阶滤波运行 4 次的结果（Purser et al., 2003a; 何光鑫等, 2011; 王玉柱等, 2014），但考虑到高阶递归滤波的计算量和内存需求，目前 GRAPES 区域 3DVar 系统中采用一阶滤波运行 10 次来逼近水平相关矩阵的运算。

比较公式（10）、（11）及（23），当相关模型采用二阶自回归模型时，也可以采用一阶递归滤波逼近水平相关矩阵的运算。在一阶递归滤波情况下，比较滤波前后的振幅响应因子和水平相关模型的谱响应函数（薛纪善和陈德辉, 2008），高斯模型的滤波振幅调节因子（β）为$\beta = \varepsilon_b^2\sqrt{2\pi}L$，滤波系数$\alpha$、$E$分别为

$$\begin{cases} \alpha = 1 + E - \sqrt{E(E+2)}, \\ E = N\delta x^2/L^2, \end{cases} \tag{28}$$

其中，N 为滤波次数。二阶自回归模型的滤波振幅调节因子为$\beta = \varepsilon_b^2 4L$，滤波系数为

$$\begin{cases} \alpha = 1 + E - \sqrt{E(E+2)}, \\ E = N\delta x^2/\left(4L^2\right). \end{cases} \tag{29}$$

由于二阶自回归模型不具有高斯模型可分解的性质，因而一阶滤波中只向前向后运行一次，即滤波次数 N 为 2。

对于尺度叠加的高斯相关模型，利用傅立叶变换线性的性质，可采用多次不同尺度的递归滤波运算叠加来实现。

在二维空间，二维各向同性的高斯滤波器相当于两个独立方向高斯滤波器的乘积（Purser et al., 2003a; 何光鑫等（2011）），即：

$$F_{2\mathrm{D}} = F^{(x)}_{(\infty)} \times F^{(y)}_{(\infty)}. \tag{30}$$

高斯模型二维滤波振幅调节因子为$\beta = \varepsilon_b^2 2\pi L^2$。对于二阶自回归模型在二维空间不等价于两个独立方向的乘积，但近似表示为两个方向一维滤波的乘积，因而振幅调节因子为$\beta = \varepsilon_b^2(4L)^2$。

3.3　动力场变量之间的水平相关

在大气中不同变量之间的相互关系也隐含在背景误差协方差之间，研究最多的为风压场之间的关系，例如，动力场和质量场的平衡关系可以用平衡方程来描述（庄照荣等, 2006a; 王瑞春等, 2015a），也可以用动力与统计相混合的平衡约束方案来反映（王瑞春等, 2015b）。对于分析变量的流函数、非平衡势函数与模式变量风场（u, v）的误差协方差之间关系关注较少，这一节主要研究这两种动力场变量之间的背景误差水平相关关系。

目前 GRAPES-3DVar 中分析变量ψ、χ_u、π_u、q 的背景误差水平相关模型为高斯模型，则分析变量某两点i, j的背景误差协方差可描述为

$$\left\langle X_i, X_j \right\rangle = E_X^2 G(r, L_X), \tag{31}$$

其中，变量 X 可为ψ、χ_u、π_u、q，E_X^2表示变量 X 的背景误差方差，$G(r, L_X)$和L_X分别为变量 X 的相关模型和水平相关尺度，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$为两点i, j之间的距离。分析变量之间的协方差为

$$\begin{cases} \left\langle \psi_i, \chi_{uj} \right\rangle = E_\psi E_{\chi_u} H(r, L_{\psi\chi}), \\ \left\langle \psi_i, \pi_{uj} \right\rangle = E_\psi E_{\pi_u} I(r, L_{\psi\pi}), \\ \left\langle \pi_{ui}, \chi_{uj} \right\rangle = E_{\pi_u} E_{\chi_u} J(r, L_{\pi\chi}), \end{cases} \tag{32}$$

其中，$H(r, L_{\psi\chi})$、$I(r, L_{\psi\pi})$、$J(r, L_{\pi\chi})$分别描述变量之间的水平相关系数。对于模式变量u、v和分析变量中的流函数、势函数有以下关系：

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\chi}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\chi}{\partial y}. \end{cases} \tag{33}$$

参照 Daley（1985）和 Hollingsworth and Lönnberg（1986）中变量协方差的关系，则u风场的协方差表达式为

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= \left\langle -\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}, -\frac{\partial\psi}{\partial y_j} + \frac{\partial\chi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\left[\frac{E_\psi^2 \partial G(r, L_\psi)}{\partial y^2} + \frac{E_\chi^2 \partial G(r, L_\chi)}{\partial x^2} - 2\frac{E_\psi E_\chi \partial H(r, L_{\psi\chi})}{\partial x \partial y} \right] \\ &= E_\psi^2 \Gamma\left[G(r, L_\psi)\right] + E_\chi^2 \Delta\left[G(r, L_\chi)\right] + 2E_\psi E_\chi \Phi\left[H(r, L_{\psi\chi})\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

类似地，v风场和u、v之间的协方差表达式如下

$$\begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle = E_\psi^2 \Delta\left[G(r, L_\psi)\right] + E_\chi^2 \Gamma\left[G(r, L_\chi)\right] \\ \qquad -2E_\psi E_\chi \Phi\left[H(r, L_{\psi\chi})\right], \\ \langle u_i, v_j \rangle = E_\psi^2 \Phi\left[G(r, L_\psi)\right] - E_\chi^2 \Phi\left[G(r, L_\chi)\right] \\ \qquad +E_\psi E_\chi \Lambda\left[H(r, L_{\psi\chi})\right], \end{cases} \tag{35}$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma = -\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + (y_i - y_j)^2 \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} \right], \\ \Delta = -\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + (x_i - x_j)^2 \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} \right], \\ \Phi = \left[(y_i - y_j)(x_i - x_j) \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} \right], \\ \Lambda = [(y_i - y_j)^2 - (x_i - x_j)^2] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}. \end{cases} \tag{36}$$

从（34）和（35）式可知，风场的背景误差协方差由流函数、势函数及它们之间的相关模型决定。假设最简单的情况，只存在一维的西风情况，且流函数不随纬度变化，则有

$$\langle u_i, u_j \rangle = -E_\chi^2 \frac{\partial G(r, L_\chi)}{\partial x^2} = -E_\chi^2 G''(r, L_\chi). \tag{37}$$

由（37）式可知，一维西风的背景误差协方差由分析变量采用的相关模型拉普拉斯算子的形状决定。由于 GRAPES-3DVar 采用了流函数和非平衡的势函数作为分析变量，风场（u, v）观测的传播方式符合分析变量相关模型的拉普拉斯算子的分布（图 1b）。因而用相关模型描述分析变量背景误差的水平相关系数时，不仅要求相关模型本身能匹配实际分析变量的水平相关，相关模型的拉普拉斯算子也应该有合理的结构来描述风场之间的相关关系。

4 数值分析试验

4.1 试验设置

本文分别把高斯、二阶自回归，以及尺度叠加的高斯模型作为 GRAPES-3DVar 背景误差水平相关模型进行了单点观测试验。试验采用的 GRAPES-3DVar 为全球和区域一体化的分析系统，试验水平分辨率为 10 km（除湿度外，采用高斯和二阶自回归相关模型时，水平相关尺度都设为 500 km），分析变量为流函数、非平衡势函数、非平衡无量纲气压和湿度。当采用尺度叠加的高斯模型时，相关尺度为 850 km、500 km、350 km；对于湿度变量，当采用高斯和二阶自回归相关模型时，水平相关尺度都设为 200 km，当采用尺度叠加的高斯模型时，相关尺度为 350 km、200 km、150 km。三组试验都采用一阶递归滤波，其中高斯及尺度叠加的高斯相关模型的递归滤波次数为 10，二阶自回归相关模型的递归滤波次数为 2。三组试验中其他设置都完全一致。依据 3DVar 分析中的背景误差相关关系（公式 32、34、35），观测风场的信息可影响到无量纲气压场和风场的其他格点，气压观测信息影响风场和质量场的其他格点，湿度变量为单变量分析，依据公式（31），湿度观测只影响湿度分析。

4.2 分析增量

第一组为单点u风场观测分析试验，以u新息增量（观测减去背景场）为主，v新息增量为 0，分析后无量纲气压、u、v风场的分析增量如图 5 所示，比较第一列和第二列可以看出对于同样的水平相关尺度，二阶自回归相关模型把观测信息传播得更远。同时也可以看出采用 Gauss 相关模型时，u分析增量在距观测点南北方向 5 度以外都有较大负增量（图 5a2），而 Soar 试验基本没有显示出负分析增量（图 5b2），尺度叠加高斯模型的负分析增量比采用单一高斯相关模型要小（图 5c2）。从图 5b2 中也可以看出，由于 Soar 相关模型只采用了一阶滤波，分析增量各向异性，分析增量结构相似于 Gauss 拉普拉斯函数采用 2 阶滤波运行一次的结果（Purser et al., 2003a；图 3a）。从图 6a 的归一化u分析增量（110°E 切线方向）可以明显看出不同相关模型对风场的影响，与图 1b、图 3b 相关模型的

二阶导数结构类似，Gauss 模型的风场负增量最大，Soar 模型的风场负增量最小，采用 3 种水平相关尺度高斯模型叠加的分析风场负增量比单一尺度高斯模型的有所减小。

第二组为单点相对湿度观测分析试验，由于比湿与其他变量不相关，因而单点湿度观测的分析增量直接显示出相关模型本身的空间结构（图 5 第四行），从归一化湿度分析增量（110°E 切线方向）可以看出湿度分析增量结构由图 1a 和图 3a 的相关模型的结构决定（图 6b）。

第三组单点v风观测分析试验，v新息增量为主，u新息增量为 0，分析后无量纲气压、u、v风场的分析增量如图 7 所示。比较第一列和第二列也可以看出对于同样的水平相关尺度，二阶自回归相关模型把观测信息传播得更远。同时也可以看出采用 Gauss 相关模型时，v分析增量在距观测点东西方向 5 度以外都有较大负增量（图 7a3），而 Soar 试验基本没有显示出负分析增量（图 7b3），尺度叠加高斯模型的负分析增量比采用单一高斯相关模型要小（图 7c3）。从图 7b3 中也可以看出，由于

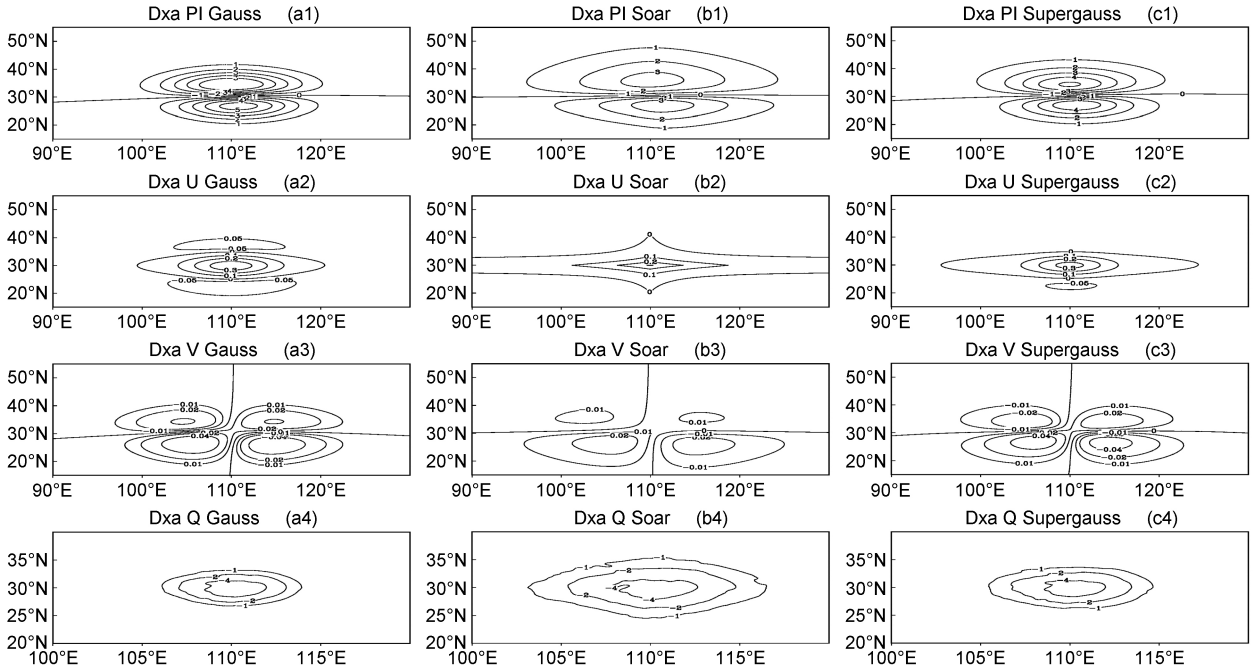

图 5　单点 u 风场和湿度观测分析试验的分析增量：Gauss（左）；Soar（中）；Supergauss（右）。第 1～4 行分别为无量纲气压（$\times 10^{-6}$）、u 风场（单位：m s^{-1}）、v 风场（单位：m s^{-1}）、比湿（单位：10^{-4} kg kg^{-1}）

Fig. 5　Analysis increments for single u-component wind and humidity observation: Gauss (left); Soar (middle); Supergauss (right). The row 1–4 indicate nondimensional pressure ($\times 10^{-6}$), u-component (units: m s^{-1}), v–component (units: m s^{-1}), specific humidity (units: 10^{-4} kg kg^{-1}), respectively

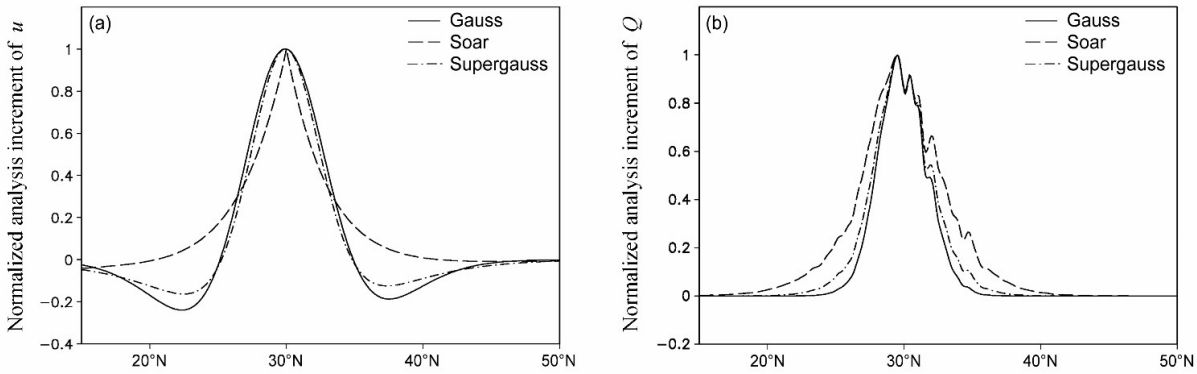

图 6　110°E 处（a）u 风场和（b）比湿归一化的分析增量

Fig. 6　Normalized analysis increment for (a) u-component and (b) specific humidity at 110°E

Soar 相关模型只采用了一阶滤波，v分析增量各向异性，其分析增量结构相似于第一组试验中 Soar 的u分析增量的结构。

第四组试验为单点气压观测分析试验，分析后无量纲气压、u、v风场的分析增量如图 8 所示。从图 8 可以看出，三种相关模型方案的分析增量结构相似，只是二阶自回归相关模型把观测信息传播得更远。单点气压观测分析中，无量纲气压分析增量的结构由相关模型的结构决定，而风场分析增量的结构受质量场和风场的相关关系影响。

由上可知，在u/v单点观测分析试验中，三种相关模型的u/v分析增量差别最大，结合上两节分

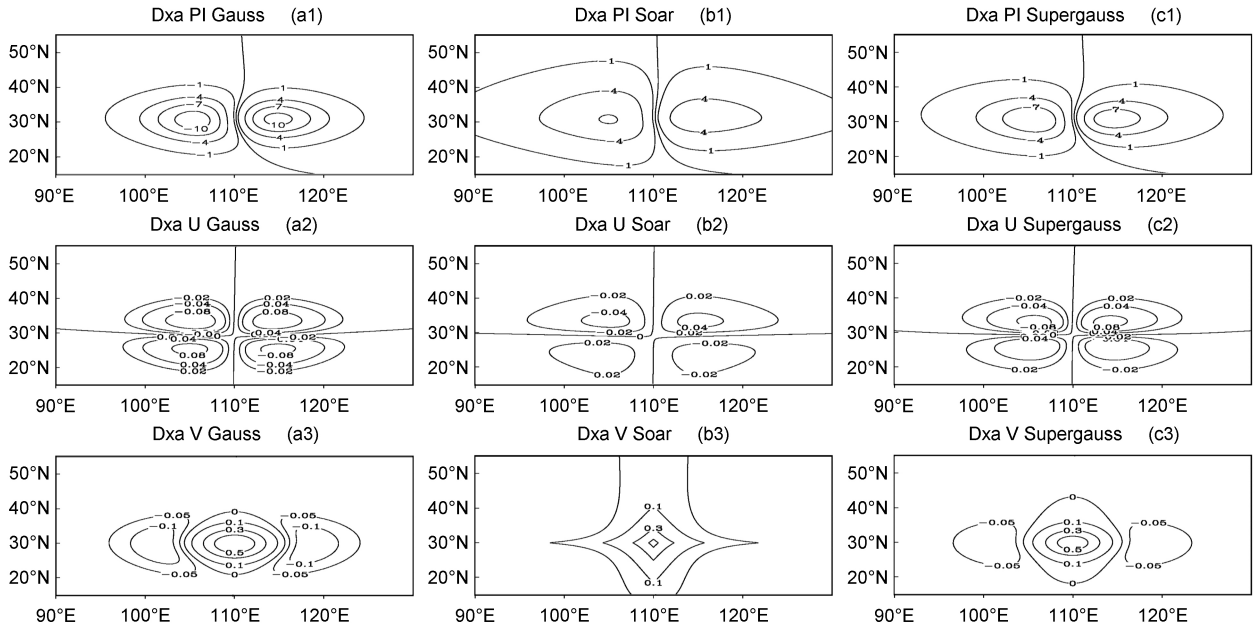

图 7 同图 5，但为单点 v 风场观测分析试验的分析增量

Fig. 7 As in Fig. 5, but for analysis increments for single v-component wind observation

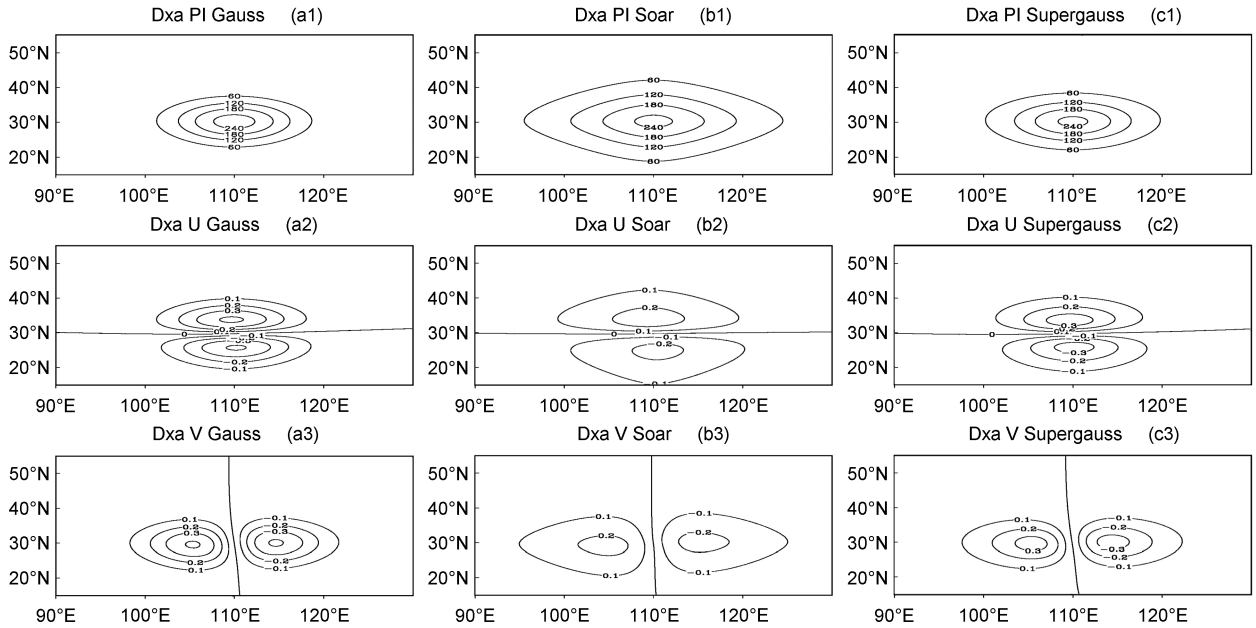

图 8 同图 5，但为单点气压观测分析试验的分析增量

Fig. 8 As in Fig. 5, but for analysis increments for single pressure observation

析，Gauss 模型下的*u*/*v*分析增量中距观测远处的负增量偏大较多，这种负增量结构和相关模型的拉普拉斯算子有关，对于 Gauss 模型不能调节负增量的大小；Soar 模型下的*u*/*v*分析增量结构明显各向异性，会造成分析增量的不连续；Supergauss 模型下的*u*/*v*分析增量中距观测远处的负增量比 Gauss 试验的小，而且采用不同相关尺度组合的尺度叠加高斯相关模型可以调节负增量的大小，因而在这 3 种相关模型中，从分析增量结构来看，Supergauss 相关模型在 GRAPES-3DVar 中应用最有优势。

4.3　分析增量的功率谱

从上节可以看出，当同化单点湿度或气压观测时，在时空域湿度或无量纲气压的分析增量分布与相关模型结构相一致；当同化单点*u*/*v*风场观测，*u*/*v*分析增量分布也明显和相关模型的拉普拉斯算子结构相关，此节从频谱域空间研究分析增量的功率谱分布。文中对单点观测分析试验的分析增量采用二维离散余弦转换（2D-DCT: Discrete Cosine Transform）方法进行谱分解（Denis et al., 2002; 郑永骏等, 2008; 庄照荣等, 2018），获得分析增量的功率谱，研究不同相关模型方案的分析增量功率谱的分布特点。

若定义天气尺度波为 2000 km 以上，次天气尺度波为 669～2000 km（龚建东, 2007），中尺度波在 669 km 至几十公里，则从图 9 的 *u* 单点观测和湿度单点观测试验的分析增量功率谱可以看出，3 种相关模型的分析增量功率谱大值都集中在波长 1000 km 以上的天气尺度和次天气尺度波动上。Gauss 相关模型的四个分析增量取对数后的功率谱基本从 1～6 波（波长从 1710～8459 km）都逐步增大，然后在 7～21 波（波长从 513～1476 km）对数功率谱又随着波数的增加呈现快速下降的趋势，随后在 22 波以上（波长<490 km）随着波数增加，对数功率谱缓慢下降。比较不同模型的分析增量功率谱，对于无量纲气压，可以看出在 965 km 以上的天气尺度和次天气尺度部分，Soar 分析增量功率谱略小于 Gauss 的，Supergauss 分析增量功率谱介于二者之间；在 965 km 以下的尺度部分，Gauss 的分析增量功率谱快速下降，并逐渐远远小于 Soar 的分析增量功率谱，Supergauss 的分析增量功率谱则介于 Gauss 和 Soar 之间，在 965 km 以下的次天气尺度和中尺度 Supergauss 的分析增量功率谱比单一 Guass 模型的有所增加（图 9a）。对于比

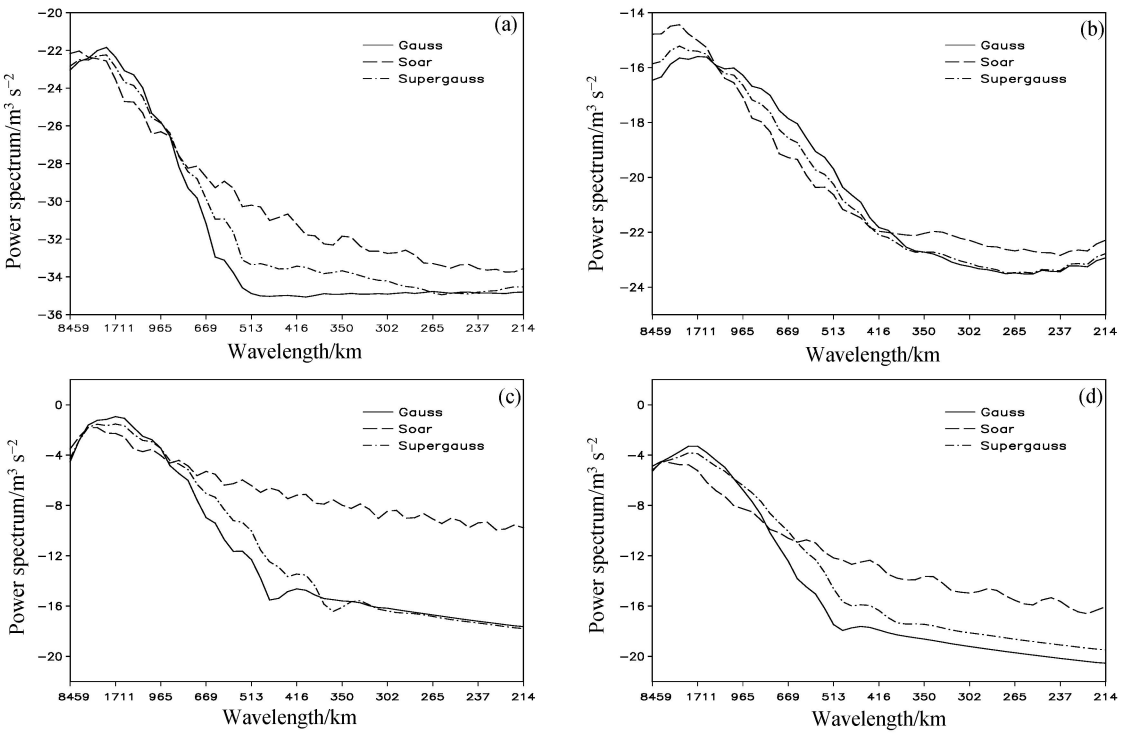

图 9　单点 *u* 风场和湿度观测分析试验的分析增量功率谱（单位：$m^3 s^{-2}$）：（a）无量纲气压；（b）比湿；（c）*u* 风场；（d）*v* 风场

Fig. 9　Power spectrum (units: $m^3 s^{-2}$) of analysis increments for single *u*-component wind and humidity observation: (a) Nondimensional pressure; (b) specific humidity; (c) *u*-component; (d) *v*-component

湿，在 416 km 以上，Gauss 模型的分析增量功率谱较大，Soar 模型的分析增量功率谱略小，Supergauss 模型的功率谱也介于 Gauss 和 Soar 模型的之间。在 416 km 以下的中尺度部分，Soar 模型的功率谱也大于 Gauss 的，Supergauss 的功率谱比 Gauss 模型的略微增加（图 9b）。对于风场，不同相关模型的影响最大，从图 9c、d 可以看出，在 669 km 以下的中尺度部分，Gauss 模型的分析增量功率谱远远小于 Soar 的，说明采用 Gauss 模型描述背景误差水平相关使中尺度分析信息不足；而采用 3 种相关尺度组合的 Supergauss 模型会缓解这种现象，分析增量的中尺度功率谱略有增加（图 9c、d），同时也可以看出，Soar 试验的 *u* 分析增量功率谱在所有波段上都明显大于 *v* 分析增量功率谱。

比较 3 种相关模型方案，对于单点 *v* 观测的分析增量功率谱分布特点与单点 *u* 观测试验的结论相似，只是功率谱大小有所不同。但是 Soar 试验的 *v* 分析增量功率谱在所有波段上都明显大于 *u* 分析增量功率谱，这与单点 *u* 观测试验的结果相反（图略）。

从单点气压观测试验的分析增量功率谱（图 10）也可以看出，在 965 km 以上的天气尺度和次天气尺度部分，Soar 三个变量的分析增量功率谱略小于 Gauss 的，Supergauss 分析增量功率谱介于二者之间；在 965 km 以下的尺度部分，Gauss 的三个变量的分析增量功率谱快速下降，并逐渐远远小于 Soar 的分析增量功率谱，Supergauss 的分析增量功率谱介于 Gauss 和 Soar 之间。虽然在时空域 Guass 与 Supergauss 方案的分析增量结果相似（图 8），但是在 965 km 以下的次天气尺度和中尺度，Supergauss 的无量纲气压与风场的分析增量功率谱都比单一 Guass 模型的增加非常明显（图 10）。

由上可知，分析增量的功率谱随波数的变化由相关模型及其拉普拉斯算子在频谱域空间谱响应模型的功率谱分布决定。目前 GRAPES-3DVar 分析的中尺度信息不足和采用的高斯相关模型有关，特别是动力场在中尺度部分分析增量的功率谱远远小于二阶自回归的功率谱。若采用 3 种相关尺度叠加或更复杂的高斯模型组合来描述背景误差的水平相关关系可以改善中尺度分析。

5 结论和讨论

本文通过比较高斯、二阶自回归以及尺度叠加

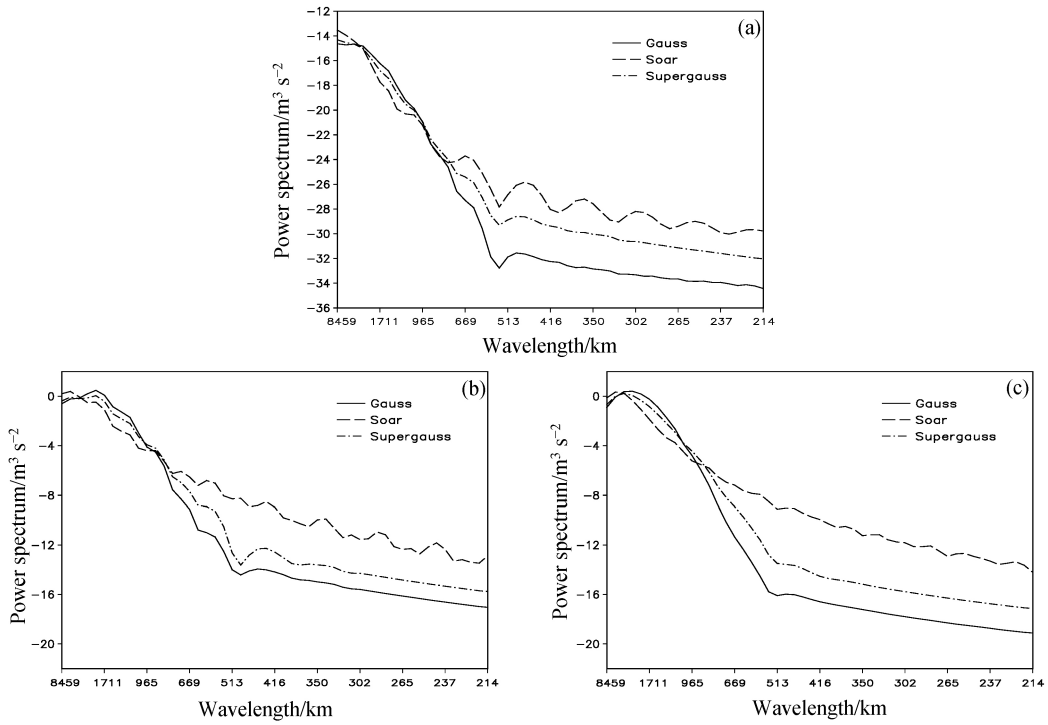

图 10 单点气压观测分析试验的分析增量功率谱（单位：m^3 s^{-2}）：（a）无量纲气压；（b）*u* 风场；（c）*v* 风场

Fig. 10 Power spectrum (units: m^3 s^{-2}) of analysis increments for single pressure observation: (a) Nondimensional pressure; (b) *u*-component; (c) *v*-component

的高斯模型在时空域和频谱域空间的特征，并把这 3 种模型作为水平相关模型应用到 GRAPES-3DVar 系统中进行理想分析试验，从本质揭示不同相关模型对分析的影响。本文主要得到以下结论：

（1）采用高斯或二阶自回归模型作为分析变量流函数和非平衡势函数的水平相关模型时，根据动力场之间的水平相关关系，u、v 风场的水平相关关系与 Gauss 或 Soar 的负拉普拉斯算子有关，因而相关模型负拉普拉斯算子的旁瓣峰值信息会影响风场观测的分析质量。

（2）高斯模型作为水平相关模型时，由于其拉普拉斯算子的旁瓣峰值较大，因而造成风场观测负相关较大，距离观测点较远的分析会出现不合理的较大负增量信息；同时高斯模型及其拉普拉斯算子在中小尺度上功率谱下降太快，也会导致分析场的中小尺度信息不足。

（3）二阶自回归模型作为水平相关模型时，其拉普拉斯算子的旁瓣峰值较小，因而风场观测的负相关信息最小，并且二阶自回归模型及其拉普拉斯算子的谱响应函数在中小尺度上功率谱较大，有利于高分辨率模式的中小尺度分析。但是在 GRAPES-3DVar 的递归滤波实施中容易造成不合理的各向异性分析增量。

（4）当高斯相关模型的水平相关尺度降低时，高频部分的谱响应函数会增加，因而观测资料的传播会包含更多的中小尺度能量，分析增量的中小尺度信息会增加。

（5）尺度叠加的高斯模型作为水平相关模型时，不仅缓解单一尺度高斯模型拉普拉斯算子负相关较大问题，同时也增加分析增量的中小尺度能量，尺度叠加的高斯模型方案在递归滤波中也较容易实施。因而，在 3 种方案中尺度叠加的高斯模型是 GRAPES-3DVar 中描述背景误差水平相关的最佳方案。

本文研究不同水平相关模型对分析的影响，分析中分析变量为流函数和非平衡势函数，当观测资料分布不均匀时不同相关模型的影响会更加显著，特别是其拉普拉斯算子的旁瓣峰值的大小可能造成稀疏观测区较大的风场分析偏差。文中只给出 3 种不同尺度叠加的高斯相关模型的分析结果，若采用更多不同相关尺度高斯模型组合即超级叠加高斯模型，用尺度参数控制模型及其拉普拉斯算子的传播程度和在不同尺度上谱能量的大小，使相关模型能准确描述分析变量流函数和非平衡势函数的水平相关关系，也使相关模型拉普拉斯算子的结构符合实际风场的水平相关关系，也许会获得更合理的分析增量。后续工作将统计模式预报场的水平相关系数，考察风场变量的实际负相关程度，重新调整尺度叠加的相关模型参数，进行实际观测资料同化和预报试验。另外，当分析中的分析变量为 u 和 v 风场时，水平相关模型直接描述 u 和 v 风场的水平相关关系，水平相关模型结构需要重新设计来适应于风场变量，而且对分析的影响要重新评估。在高分辨率模式下，还需要通过多尺度同化技术构造不同资料的多尺度空间观测误差和背景误差协方差信息，通过多次不同尺度同化，实现不同空间尺度观测信息的快速有效融合，此时如何设计适合多尺度同化方案的水平相关模型，在有效同化不同尺度观测信息的基础上，还能保证计算效率是需要进一步研究的内容。

本文研究内容基于三维变分分析系统，在当前流行的混合变分分析系统中，背景误差协方差采用气候统计的静态结构和集合统计的随天气形势演变的动态结构（Wang et al., 2008a, 2008b, 2013; Hamill and Snyder, 2000; 马旭林等, 2014, 2015; Chen et al., 2015），静态的背景误差协方差权重相对动态的较小，因而协方差模型的作用也会相对减弱（Bédard et al., 2020）。此外，在集合同化以及集合变分的同化方法中，天气形势依赖的背景误差协方差取代气候态的背景误差协方差，避免了对背景误差协方差进行模型化。例如，集合卡尔曼滤波（EnKF）（Evensen, 1994, 2003; Houtekamer and Mitchell, 1998, 2001; 庄照荣等, 2011a, 2011b; Houtekamer and Zhang, 2016）、集合平方根滤波（EnSRF）（Whitaker and Hamill, 2002）以及集合卡尔曼平滑（EnKS）（Evensen and van Leeuwen, 2000）等集合同化算法都采用集合样本获得流依赖的背景误差协方差，并且获得一组集合分析。在集合变分同化方法中，En4DVar 需要对预报模式进行切线性化（Bishop and Hodyss, 2011; Clayton et al., 2013; Gustafsson and Bojarova, 2014），而 4DEnVar 可以避免对预报模式的切线性和伴随计算（Liu et al., 2008, 2009; Liu and Xiao, 2013; Wang and Lei, 2014; Kleist and Ide, 2015），但以上的集合变分同化方法只能获得单一分析。在变分分析和集合分析的基础上衍生出许多同化方法，总的来说四维同化优于三维同化，混合方法比纯粹的变分、集合或者集合

变分方案更趋向于获得质量更高的分析（Bannister, 2017）。

参考文献（References）

Bannister R N. 2017. A review of operational methods of variational and ensemble-variational data assimilation [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 143: 607−633. doi:10.1002/qj.2982

Bédard J, Caron J F, Buehner M, et al. 2020. Hybrid background error covariances for a limited-area deterministic weather prediction system [J]. Wea. Forecasting, 35: 1051−1066. doi:10.1175/WAF-D-19-0069.1

Bishop C H, Hodyss D. 2011. Adaptive ensemble covariance localization in ensemble 4D-VAR state estimation [J]. Mon. Wea. Rev., 139: 1241−1255. doi:10.1175/2010MWR3403.1

Chen Lianglü, Chen Jing, Xue Jishan, et al. 2015. Development and testing of the GRAPES regional ensemble-3DVar hybrid data assimilation system [J]. Journal of Meteorological Research, 29: 981−996. doi:10.1007/s13351-015-5021-y

Clayton A M, Lorenc A C, Barker D M. 2013. Operational implementation of a hybrid ensemble/4D-Var global data assimilation system at the Met Office [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 139: 1445−1461. doi:10.1002/qj.2054

Daley R. 1985. The analysis of synoptic scale divergence by a statistical interpolation procedure [J]. Mon. Wea. Rev., 113: 1066−1080. doi:10.1175/1520-0493(1985)113<1066:TAOSSD>2.0.CO;2

Daley R. 1991. Atmospheric Data Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 107–118.

Dee D, Gaspari G. 1996. Development of anisotropic correlation models for atmospheric data assimilation [C]//Proceedings of the 11th Conference on Numerical Weather Prediction. Norfolk: American Meteorological Society, 249–251.

Denis B, Côté J, Laprise R. 2002. Spectral decomposition of two-dimensional atmospheric fields on limited-area domains using the Discrete Cosine Transform (DCT) [J]. Mon. Wea. Rev., 130: 1812−1829. doi:10.1175/1520-0493(2002)130<1812:SDOTDA>2.0.CO;2

Evensen G. 1994. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics [J]. J. Geophys. Res., 99: 10143−10162. doi:10.1029/94JC00572

Evensen G. 2003. The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation [J]. Ocean Dyn., 53: 343−367. doi:10.1007/s10236-003-0036-9

Evensen G, van Leeuwen P J. 2000. An ensemble Kalman smoother for nonlinear dynamics [J]. Mon. Wea. Rev., 128: 1852−1867. doi:10.1175/1520-0493(2000)128<1852:AEKSFN>2.0.CO;2

Franke R. 1999. Three-dimensional covariance functions for NOGAPS data [J]. Mon. Wea. Rev., 127: 2293−2308. doi:10.1175/1520-0493(1999)127<2293:TDCFFN>2.0.CO;2

龚建东. 2007. 资料同化中二维特征长度随模式分辨率变化的分析研究 [J]. 大气科学, 31(3): 459−467. Gong Jiandong. 2007. The analysis on variation of horizontal de-correlation length with model resolution in data assimilation system [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 31(3): 459−467. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2007.03.09

Gustafsson N, Bojarova J. 2014. Four-dimensional ensemble variational (4D-En-Var) data assimilation for the HIgh Resolution Limited Area Model (HIRLAM) [J]. Nonlinear Processes in Geophysics, 21: 745−762. doi:10.5194/npg-21-745-2014

Hamill T M, Snyder C. 2000. A hybrid ensemble Kalman filter-3D variational analysis scheme [J]. Mon. Wea. Rev., 128: 2905−2919. doi:10.1175/1520-0493(2000)128<2905:AHEKFV>2.0.CO;2

何光鑫. 2009. 递归滤波方案在 GRAPES-3DVar 中的运用研究 [D]. 南京信息工程大学硕士学位论文, 30−36. He Guangxin. 2009. The application of recursive filters to GRAPES three-dimensional variational data assimilation system [D]. M. S. thesis (in Chinese), Nanjing University of Information Science & Technology, 30−36.

何光鑫, 李刚, 张华. 2011. GRAPES-3DVar 高阶递归滤波方案及其初步试验 [J]. 气象学报, 69(6): 1001−1008. He Guangxin, Li Gang, Zhang Hua. 2011. The scheme of high-order recursive filter for the GRAPES-3DVar with its initial experiments [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 69(6): 1001−1008. doi:10.11676/qxxb2011.087

Hollingsworth A, Lönnberg P. 1986. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part I: The wind field [J]. Tellus, 38A: 111−136. doi:10.1111/j.1600-0870.1986.tb00460.x

Houtekamer P L, Mitchell H L. 1998. Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique [J]. Mon. Wea. Rev., 126: 796−811. doi:10.1175/1520-0493(1998)126<0796:DAUAEK>2.0.CO;2

Houtekamer P L, Mitchell H L. 2001. A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation [J]. Mon. Wea. Rev., 129: 123−137. doi:10.1175/1520-0493(2001)129<0123:ASEKFF>2.0.CO;2

Houtekamer P L, Zhang F Q. 2016. Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation [J]. Mon. Wea. Rev., 144: 4489−4532. doi:10.1175/MWR-D-15-0440.1

Ingleby N B. 2001. The statistical structure of forecast errors and its representation in the Met. Office global 3-D variational data assimilation scheme [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 127: 209−231. doi:10.1002/qj.49712757112

Kleist D T, Ide K. 2015. An OSSE-based evaluation of hybrid variational-ensemble data assimilation for the NCEP GFS. Part Ⅱ: 4DEnVar and hybrid variants [J]. Mon. Wea. Rev., 143: 452−470. doi:10.1175/MWR-D-13-00350.1

Liu Chengsi, Xiao Qingnong. 2013. An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part Ⅲ: Antarctic applications with advanced research WRF using real data [J]. Mon. Wea. Rev., 141: 2721−2739. doi:10.1175/MWR-D-12-00130.1

Liu Chengsi, Xiao Qingnong, Wang Bin. 2008. An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test [J]. Mon. Wea. Rev., 136: 3363−3373. doi:10.1175/2008MWR2312.1

Liu Chengsi, Xiao Qingnong, Wang Bin. 2009. An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part Ⅱ: Observing system simulation experiments with advanced research WRF (ARW) [J]. Mon. Wea. Rev., 137: 1687−1704. doi:10.1175/2008MWR2699.1

Lönnberg P, Hollingsworth A. 1986. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part Ⅱ: The covariance of height and wind errors [J]. Tellus, 38A: 137−161. doi:10.3402/tellusa.v38i2.11708

马旭林, 陆续, 于月明, 等. 2014. 数值天气预报中集合—变分混合资料同化及其研究进展 [J]. 热带气象学报, 30(6): 1188−1195. Ma Xulin, Lu Xu, Yu Yueming, et al. 2014. Progress on hybrid ensemble-variational data assimilation in numerical weather prediction [J]. Journal of Tropical Meteorology (in Chinese), 30(6): 1188−1195. doi:10.3969/j.issn.1004-4965.2014.06.020

马旭林, 李琳琳, 周勃旸, 等. 2015. 台风预报误差的流依赖特征及混合资料同化中最优耦合系数 [J]. 大气科学学报, 38(6): 766−775. Ma Xulin, Li Linlin, Zhou Boyang, et al. 2015. Flow-dependent characteristics of typhoon forecasting errors and optimal coupling coefficient in hybrid data assimilation [J]. Transactions of Atmospheric Sciences (in Chinese), 38(6): 766−775. doi:10.13878/j.cnki.dqkxxb.20141224001

Parrish D F, Derber J C. 1992. The national meteorological center's spectral statistical-interpolation analysis system [J]. Mon. Wea. Rev., 120:1747−1763.doi:10.1175/1520-0493(1992)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2

Purser R J, Wu Wanshu, Parrish D F, et al. 2003a. Numerical aspects of the application of recursive filters to variational statistical analysis. Part I: Spatially homogeneous and isotropic Gaussian covariances [J]. Mon. Wea. Rev., 131: 1524−1535. doi:10.1175//1520-0493(2003)131<1524:NAOTAO>2.0.CO;2

Purser R J, Wu Wanshu, Parrish D F, et al. 2003b. Numerical aspects of the application of recursive filters to variational statistical analysis. Part Ⅱ: Spatially inhomogeneous and anisotropic general covariances [J]. Mon. Wea. Rev., 131: 1536−1548. doi:10.1175//2543.1

Vandenberghe F, Kuo Y H. 1999. Introduction to the MM5 3D-VAR data assimilation system: Theoretical basis [R]. NCAR Technical note 917.

Wang Xuguang, Lei Ting. 2014. GSI-based four-dimensional ensemble-variational (4DEnsVar) data assimilation: Formulation and single-resolution experiments with real data for NCEP global forecast system [J]. Mon. Wea. Rev., 142: 3303−3325. doi:10.1175/MWR-D-13-00303.1

Wang Xuguang, Barker D M, Snyder C, et al. 2008a. A hybrid ETKF-3DVar data assimilation scheme for the WRF model. Part I: Observing system simulation experiment [J]. Mon. Wea. Rev., 136: 5116−5131. doi:10.1175/2008MWR2444.1

Wang Xuguang, Barker D M, Snyder C, et al. 2008b. A hybrid ETKF-3DVar data assimilation scheme for the WRF model. Part Ⅱ: Real observation experiments [J]. Mon. Wea. Rev., 136: 5132−5147. doi:10.1175/2008MWR2445.1

Wang Xuguang, Parrish D, Kleist D, et al. 2013. GSI 3DVar-based ensemble-variational hybrid data assimilation for NCEP global forecast system: Single-resolution experiments [J]. Mon. Wea. Rev., 141: 4098−4117. doi:10.1175/MWR-D-12-00141.1

王金成, 庄照荣, 韩威, 等. 2014. GRAPES 全球变分同化背景误差协方差的改进及对分析预报的影响: 背景误差协方差三维结构的估计 [J]. 气象学报, 72(1): 62−78. Wang Jincheng, Zhuang Zhaorong, Han Wei, et al. 2014. An improvement of background error covariance in the global GRAPES variational data assimilation and its impact on the analysis and prediction: Statistics of the three-dimensional structure of background error covariance [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 72(1): 62−78. doi:10.11676/qxxb2014.008

王亚华, 杨晓帆, 曾勇虎, 等. 2017. GRAPES 全球模式背景误差协方差水平结构特征分析 [J]. 干旱气象, 35(1): 57−63. Wang Yahua, Yang Xiaofan, Zeng Yonghu, et al. 2017. Horizontal structural characteristics analysis of global GRAPES model background error covariance [J]. Journal of Arid Meteorology (in Chinese), 35(1): 57−63.

王玉柱, 姜金荣, 迟学斌, 等. 2014. 并行准高斯高阶递归滤波算法研究 [J]. 计算数学, 36(2): 179−194. Wang Yuzhu, Jiang Jinrong, Chi Xuebin, et al. 2014. Research on parallel algorithm of quasi-gaussian high-order recursive filter [J]. Mathematica Numerica Sinica (in Chinese), 36(2): 179−194.

王瑞春, 龚建东, 张林, 等. 2015a. 热带风压场平衡特征及其对 GRAPES 系统中同化预报的影响研究. I: 平衡特征分析 [J]. 大气科学, 39(5): 953−966. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin, et al. 2015a. Tropical balance characteristics between mass and wind fields and their impact on analyses and forecasts in GRAPES system. Part I: Balance characteristics [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 39(5): 953−966. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1412.14233

王瑞春, 龚建东, 张林, 等. 2015b. 热带风压场平衡特征及其对 GRAPES 系统中同化预报的影响研究. Ⅱ: 动力与统计混合平衡约束方案的应用 [J]. 大气科学, 39(6): 1225−1236. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin, et al. 2015b. Tropical Balance Characteristics between mass and wind fields and their impact on analyses and forecasts in GRAPES system. Part Ⅱ: Application of linear balance equation-regression hybrid constraint scheme [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 39(6): 1225−1236. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1412.14234

Whitaker J S, Hamill T M. 2002. Ensemble data assimilation without perturbed observations [J]. Mon. Wea. Rev., 130: 1913−1924. doi:10.1175/1520-0493(2002)130<1913:EDAWPO>2.0.CO;2

吴洋, 徐枝芳, 王瑞春, 等. 2018. 基于多尺度混合滤波的 GRAPES_3Dvar 及其在实际暴雨预报中的应用分析 [J]. 气象, 44(5): 621−633. Wu Yang, Xu Zhifang, Wang Ruichun, et al. 2018. Improvement of GRAPES_3Dvar with a new multi-scale filtering and its application in heavy rain forecasting [J]. Meteorological Monthly (in Chinese), 44(5): 621−633. doi:10.7519/j.issn.1000-0526.2018.05.003

Xu Qin, Li Wei, van Andrew T, et al. 2001. Estimation of three-

dimensional error covariances. Part I: Analysis of height innovation vectors [J]. Mon. Wea. Rev., 129: 2126−2135. doi:10.1175/1520-0493(2001)129<2126:EOTDEC>2.0.CO;2

薛纪善, 陈德辉. 2008. 数值预报系统 GRAPES 的科学设计与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 6–10. Xue Jishan, Chen Dehui. 2008. Scientific Design and Application of GRAPES (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press, 6–10.

薛纪善, 刘艳, 张林, 等. 2012. GRAPES 全球三维变分同化系统模式变量分析版科学文档 [R]. 北京: 中国气象局, 1–11. Xue Jishan, Liu Yan, Zhang Lin, et al. 2012. Scientific documentation of GRAPES-3DVar version for global model (in Chinese) [R]. Beijing: China Meteorological Administration, 1–11.

张华, 薛纪善, 庄世宇, 等. 2004. GRAPeS 三维变分同化系统的理想试验 [J]. 气象学报, 62(1): 31−41. Zhang Hua, Xue Jishan, Zhuang Shiyu, et al. 2004. Idea experiments of GRAPeS three-dimensional variational data assimilation system [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 62(1): 31−41. doi:10.3321/j.issn:0577-6619.2004.01.004

郑永骏, 金之雁, 陈德辉. 2008. 半隐式半拉格朗日动力框架的动能谱分析 [J]. 气象学报, 66(2): 143−157. Zheng Yongjun, Jin Zhiyan, Chen Dehui. 2008. Kinetic energy spectrum analysis in a semi-implicit semi-Lagrangian dynamical framework [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 66(2): 143−157. doi:10.3321/j.issn:0577-6619.2008.02.002

庄世宇, 薛纪善, 朱国富, 等. 2005. GRAPES 全球三维变分同化系统——基本设计方案与理想试验 [J]. 大气科学, 29(6): 872−884. Zhuang Shiyu, Xue Jishan, Zhu Guofu, et al. 2005. GRAPES global 3D-Var system— Basic scheme design and single observation test [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 29(6): 872−884. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2005.06.04

庄照荣, 薛纪善, 朱宗申, 等. 2006a. 非线性平衡方案在三维变分同化系统中的应用 [J]. 气象学报, 64(2): 137−148. Zhuang Zhaorong, Xue Jishan, Zhu Zongshen, et al. 2006a. Application of nonlinear balance scheme in three-dimensional variational data assimilation [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 64(2): 137−148. doi:10.3321/j.issn:0577-6619.2006.02.002

庄照荣, 薛纪善, 庄世宇, 等. 2006b. 资料同化中背景场位势高度误差统计分析的研究 [J]. 大气科学, 30(3): 533−544. Zhuang Zhaorong, Xue Jishan, Zhuang Shiyu, et al. 2006b. A study of the statistical analysis of the geopotential height background errors in the data assimilation [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 30(3): 533−544.

庄照荣, 薛纪善, 李兴良. 2011a. GRAPES 集合卡尔曼滤波资料同化系统. I: 系统设计及初步试验 [J]. 气象学报, 69(4): 620−630. Zhuang Zhaorong, Xue Jishan, Li Xingliang. 2011a. The GRAPES ensemble Kalman filter data assimilation system. Part I: Design and its tentative experiment [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 69(4): 620−630. doi:10.11676/qxxb2011.054

庄照荣, 薛纪善, 李兴良. 2011b. GRAPES 集合卡尔曼滤波资料同化系统. Ⅱ: 区域分析及集合预报 [J]. 气象学报, 69(5): 860−871. Zhuang Zhaorong, Xue Jishan, Li Xingliang. 2011b. The GRAPES ensemble Kalman filter data assimilation system. Part Ⅱ: Regional analysis and ensemble prediction [J]. Acta Meteor. Sinica (in Chinese), 69(5): 860−871. doi:10.11676/qxxb2011.075

庄照荣, 陈静, 黄丽萍, 等. 2018. 全球和区域分析的混合方案对区域预报的影响试验 [J]. 气象, 44(12): 1509−1517. Zhuang Zhaorong, Chen Jing, Huang Liping, et al. 2018. Impact experiments for regional forecast using blending method of global and regional analyses [J]. Meteorological Monthly (in Chinese), 44(12): 1509−1517. doi:10.7519/j.issn.1000-0526.2018.12.001

庄照荣, 王瑞春, 王金成, 等. 2019. GRAPES_Meso 背景误差特征及应用 [J]. 应用气象学报, 30(3): 316−331. Zhuang Zhaorong, Wang Ruichun, Wang Jincheng, et al. 2019. Characteristics and application of background errors in GRAPES_Meso [J]. Journal of Applied Meteorological Science (in Chinese), 30(3): 316−331. doi:10.11898/1001-7313.20190306