王鹏飞, 李建平, 黄刚. 2019. 高阶 Runge-Kutta-Li 算法对二维线性平流方程的计算检验 [J]. 气候与环境研究, 24(4): 417−429. Wang Pengfei, Li Jianping, Huang Gang. 2019. High order Runge-Kutta-Li scheme to solve two-dimensional linear advection equations [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 24(4): 417−429. doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2019.18169

# 高阶 Runge-Kutta-Li 算法对二维线性平流方程的计算检验

王鹏飞[1,2]　李建平[3,4]　黄刚[1]

1 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029
2 中国科学院大气物理研究所季风系统研究中心，北京 100190
3 中国海洋大学物理海洋教育部重点实验室，山东青岛 266003
4 青岛海洋科学与技术国家实验室区域海洋动力学与数值模拟功能实验室，山东青岛 266237

**摘　要**　利用高阶 Li 空间微分方案(Li, 2005)，实现了时间积分为 3～6 阶 Runge-Kutta-Li(RKL)格式的求解算法。二维线性平流方程的试验结果表明：在计算稳定的条件下，各阶算法的计算误差随时间的推移基本上是线性增加的。非转动背景场的平流算例中（高斯型的初值），高阶 RKL 算法可以取得较好的计算效果。与 3、4、5、6 阶 RK 算法配合的 Li 空间差分方案有效阶数可以达到 5、7、9、10 阶。RK 算法的阶数为 5（6）阶时，总误差控制在 $10^{-7}$（$10^{-8}$）以内。随 RK 阶数增加 Li 微分的有效阶数有增加趋势，且总误差逐渐减小。定常转速的背景场算例中（偏心的高斯型初值），当 RK 阶数为 3 时，最优空间差分阶数为 10；相应的阶数为 4、5、6 时对应的空间最优阶为 16，22，22，总计算误差可以控制在 $10^{-15}$～$10^{-16}$。随着精度的提高，误差的绝对值减小很迅速，说明算法是非常有效的。对于圆锥型初值（定常转速的背景场），4、5、6 阶 RK 算法和 3 阶算法的效果差不多。高阶算法对此类具有导数不连续点的算例，效果不如高斯初始场好，结果不能保持正定，有些地方误差出现下冲和上翘。随着空间差分精度的提高，非正定的解数量和数值减小，误差的绝对值减小，说明了算法在一定程度上是有效的，但并不适合追求极高的算法阶数。这与谱方法中的导数不连续问题有些相似，误差的产生主要源于导数的不连续性，差分类方法仅能获得与导数连续性阶数相当的算法精度。各种算例中，采用恰当的边界条件是必要的，例如旋转背景场算例，比较适合使用无穷远边界条件，否则会出现计算不稳定或无法将计算误差控制到较小的范围内。

**关键词**　Runge-Kutta-Li 格式　高阶算法　二维平流方程
**文章编号**　1006-9585(2019)04-0417-13　　**中图分类号**　P435　　**文献标识码**　A
**doi:**10.3878/j.issn.1006-9585.2019.18169

# High Order Runge-Kutta-Li Scheme to Solve Two-dimensional Linear Advection Equations

WANG Pengfei[1,2], LI Jianping[3,4], and HUANG Gang[1]

1 *State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029

**收稿日期**　2018-12-26；**网络预出版日期**　2019-04-21
**作者简介**　王鹏飞，男，1973 年出生，博士，高级工程师，主要从事数值模式、并行计算、非线性可预报性等方面的研究。E-mail: wpf@mail.iap.ac.cn
**资助项目**　国家重点研发计划 2018YFA0605904，国家自然科学基金资助项目 41530426、41831175、41425019，海洋局国际合作项目 GASI-IPOVAI-03
**Funded by**　National Key Research and Development Program of China (Grant 2018YFA0605904), National Natural Science Foundation of China (Grants 41530426, 41831175, and 41425019), SOA International Cooperation Program on Global Change and Air−Sea Interactions (Grant GASI-IPOVAI-03)

2 *Center for Monsoon System Research*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100190
3 *Key Laboratory of Physical Oceanography Institute for Advanced Ocean Studies*, *Ocean University of China*, *Qingdao*, *Shandong Province* 266003
4 *Laboratory for Regional Oceanography and Numerical Modeling*, *Qingdao National Laboratory for Marine Science and Technology*, *Qingdao*, *Shandong Province* 266237

**Abstract** In this study, aiming to take full advantages of Li's high-order spatial differential method (Li, 2005), we implement the hybrid Runge-Kutta-Li (RKL) scheme to solve a two-dimensional (2D) linear advection equation. The results indicate that the computation error increased linearly with time. The experiments with a no-rotate background field of the Gaussian initial values by RKL scheme could obtain a precise result. The effective spatial orders were 5, 7, 9, and 10, corresponding to temporal orders of 3, 4, 5, and 6, respectively. The fifth- (sixth-) order Runge-Kutta (RK) integration scheme with the ninth- (tenth-) order Li's difference scheme in spatial direction controlled the error within $10^{-7}$($10^{-8}$). The effective order of Li's scheme (Li, 2005) tended to increase with the increase in the RK order, and the total error gradually decreased.

Another rotated background field integrated from an eccentric Gaussian-type initial featured similar results. The effective spatial order was 10 when a third-order RK scheme was applied, and they increased to 16, 22, and 22 when the order of RK scheme changed to 4, 5, and 6, respectively. The computation error could be controlled within $10^{-15}$–$10^{-16}$, and the peak of Gaussian initial values were well maintained. The error decreased sharply while the order of RKL scheme increased, which indicates that the RKL is very effective to deal with such problem.

The experiments of RKL scheme to solve a cone initial case (with rotated background filed) indicate that the fourth, fifth, and sixth RK integration obtained almost the same precision result as the third-order RK scheme. The high-order scheme was not as effective as it was for the Gaussian initial condition when it addressed a problem that had discontinuous derivates. The computed solution was not positive in the whole grids, and in some places, the error was downward, while it was upward in some other places. The increase of spatial order could make the error smaller, but the error descent was not very sharp. This result suggests that the high-order spatial difference scheme has some benefits, but we should not expect that an ultra-high-order scheme will lead to an ultra-high precise result. This phenomenon reveals that the high-order scheme is limited by the continuous property of the initial condition, and as a result, the error order is directly proportional to the order of derivates of the initial condition.

The proper boundary conditions are important for the above computation cases when the RKL scheme is applied. For instance, in the computation of the rotated background cases, the value outside the grid box tends to 0 at ∞, which is a feasible boundary condition. An improper boundary condition may cause the computation to be unstable, or the error cannot be controlled to an acceptable range.

**Keywords** Runge-Kutta-Li scheme, High-order scheme, Two-dimensional advection equation

## 1 引言

数值模式和数值模拟是定量研究天气和气候变化的主要工具，但是由于数学模型中各变量之间复杂的非线性作用关系，导致模拟结果中存在着不确定性。这些不确定性的来源既包含物理参数的选取、模式的框架、观测的误差，也包括了计算误差的影响（von Neumann and Goldstine, 1947）。计算误差对数值模拟结果的影响可以从复杂的大气环流模式（王鹏飞等，2007）、耦合模式（陈显尧等, 2008)运行结果看出，也可以从简单的混沌动力系统（Li et al., 2000; Liao, 2008; Wang et al., 2014）、准地转模式（Teixeira et al., 2007）的数值试验得到验证。因此，如何采取有效的方法来控制计算误差的增长，对长时间的数值计算和精确的数值模拟至关重要。

大气和海洋流体力学模式中有许多形如 $\partial F/\partial t = LF$（其中 $L$ 为包含变量 $F$ 以及 $F$ 关于空间变量导数的算子的发展方程，$t$ 为时间），使用数值模式求解这类方程组时，计算误差的大小主要取决于空间和时间方向的算法精度。对这类方程计算误差的研究回顾可以参考王鹏飞等（王鹏飞等，2019）的文章。一般流体问题的空间高阶算法可以参考（Tal-Ezer, 1986, 1989; Lele, 1992; 季仲贞和王

斌, 1994; Ma and Fu, 1996; 吴声昌和刘小清, 1996）。大气科学领域的高阶算法可以参考季仲贞和王斌（1994）、Li（2005）、冯涛和李建平（2007）的工作。时间积分中的误差变化可以参考Li et al.（2000）、Teixeira et al.（2007）、Wang et al.（2012）等的结果。

大气环流模式主要包括动力框架和物理过程两个部分，平流方案包含于动力框架中，并被框架所计算的背景流场所驱动，负责平流多种大气成分（也称示踪物），如水汽、云水、气溶胶等。平流过程是物理参数化和动力过程之间的重要桥梁，它的好坏直接影响到大气成分的时空分布。尽管平流方程的形式比较简单，但要正确、高效的对其进行计算仍有许多问题需要解决。大部分的平流方案建立在欧拉框架下，空间被离散为具有一定分辨率的网格，流体微团会在不同的网格之间迁移，而迁移的过程中逐渐和周围的微团混合，若梯度计算存在误差，则在这种混合的作用下会进一步减小梯度，即存在“数值扩散”。

研究表明增加算法阶数来减小时间积分时的计算误差是有效的，在冯涛和李建平（2007）研究的基础上，Wang（2017）发展了一种新的高阶Taylor-Li-Wang（TLW）算法，它的特点是可以调节时间积分方案的阶数，完成从3～30阶甚至更高阶数的算法。他们的结果显示时间积分方案的阶数大于3之后，对应的最优空间差分精度阶数可以比6阶提高很多。如算法的时间积分阶数达到5时，一维线性平流方程的算例中相匹配的空间差分阶数为10阶，误差为$10^{-6}$量级。而无粘Burgers（Hopf, 1950）的算例中，与5阶时间积分相匹配的空间差分阶数为16阶，误差为$10^{-14}$量级。

通常，对于一些需要高精度，但又不要求极端的高精度数值解时，5、6阶的时间积分方案就够用了。相比于TLW算法，6阶以内的RK方法编程实现要简单，因此，王鹏飞等(2019)将冯涛和李建平（2007）所用的RK3算法，改进为3～6阶可调的RK方法，配合Li高阶微分公式形成Runge-Kutta-Li（简记RKL）算法。但该文仅给出了一维系统的算例，本研究将RKL算法推广到求解二维平流方程的问题中，研究RKL方法对二维平流方程的模拟效果，评估其计算性能。

## 2 RK方法与Li 空间差分算法联合的RKL算法

### 2.1 3～6阶Runge-Kutta-Li算法

RKL算法的详情可参考（王鹏飞等, 2019），这里仅作简述。RK方法是一个经典的算法，常被用于求解微分方程，许多文献都对此方法进行了介绍（Hairer et al., 1993; Butcher, 2008）。

以一维平流方程为例，说明RKL算法的实现，方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\,. \tag{1}$$

在求解的过程中，时间方向使用RK方法，各阶RK方法具体如下：3阶RK方法（Heun）为

$$\begin{cases} Z_1=z^n, \\ Z_2=z^n+\dfrac{1}{3}\tau f\left(Z_1\right), \\ Z_3=z^n+\dfrac{2}{3}\tau f\left(Z_2\right), \\ Z^{n+1}=z^n+\dfrac{1}{4}\tau f\left(Z_1\right)+\dfrac{3}{4}\tau f\left(Z_3\right), \end{cases} \tag{2}$$

4阶RK方法为

$$\begin{cases} Z_1=z^n, \\ Z_2=z^n+\dfrac{1}{2}\tau f\left(Z_1\right), \\ Z_3=z^n+\dfrac{1}{2}\tau f\left(Z_2\right), \\ Z_4=z^n+\tau f\left(Z_3\right), \\ Z^{n+1}=z^n+\dfrac{1}{6}\tau\left[f\left(Z_1\right)+2f\left(Z_2\right)+2f\left(Z_3\right)+f\left(Z_4\right)\right], \end{cases} \tag{3}$$

当RK算法阶数提升时，计算步数增加，方程的个数也增加明显，为了简便书写，可将其写为系数表的形式，例如RK4写成系数表的形式为

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\,, \tag{4}$$

其中，第1行表示：$Z_1=z^n$；第2行表示：$Z_2=z^n+\frac{1}{2}\tau f\left(Z_1\right)$，竖线右侧的第1列$\left(\frac{1}{2}\right)$为$\tau f\left(Z_1\right)$的系

数；第3行表示：$Z_3 = z^n + \frac{1}{2}\tau f\left(Z_2\right)$，竖线右侧的第1,2列$\left(0, \frac{1}{2}\right)$分别为$\tau f\left(Z_1\right)$、$\tau f\left(Z_2\right)$的系数；第4行表示：$Z_4 = z^n + \tau f\left(Z_3\right)$，竖线右侧的第1，2，3列（0，0，1）分别为$\tau f\left(Z_1\right)$、$\tau f\left(Z_2\right)$、$\tau f\left(Z_3\right)$的系数；依此类推。第5行（横线下）表示：$Z^{n+1} = z^n + \frac{1}{6}\tau\left[f\left(Z_1\right) + 2f\left(Z_2\right) + 2f\left(Z_3\right) + f\left(Z_4\right)\right]$，横线下为计算下一步数值$Z^{n+1}$，横线上的计算均为临时变量值。

5阶RK方法（Butcher, 2008）（这里仅给出系数表）为

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & \\
\frac{3}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \\
1 & -\frac{3}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} \quad \frac{7}{90}
\end{array}, \tag{5}$$

6阶RK方法（Butcher, 2008）（这里仅给出系数表）为

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & & & \\
\frac{5}{6} & \frac{25}{48} & -\frac{55}{44} & \frac{35}{48} & \frac{15}{8} & & \\
\frac{1}{6} & \frac{3}{20} & -\frac{11}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \\
1 & -\frac{261}{260} & \frac{33}{13} & \frac{43}{156} & -\frac{118}{39} & \frac{32}{195} & \frac{80}{39} \\
\hline
 & \frac{13}{200} & 0 & \frac{11}{40} & \frac{11}{40} & \frac{4}{25} & \frac{13}{200}
\end{array}. \tag{6}$$

需要说明的是，3阶以上的RK方法，系数形式并不唯一，这里选用了其中一种常用的形式。

空间方向采用任意阶精度的Li（2005）算法，计算公式为

$$f_y(m)\left(y_i\right) = \frac{1}{h^m}\sum_{j=0}^{n} d_{n+1,i,j}^{(m)} f\left(y_j\right), \tag{7}$$

此公式的精度为$(n - m + 1)$阶，其中$d_{n+1,i,j}^{(m)}$的含义和计算方法参考Li（2005），本文选$m \equiv 1$，因此，$n$阶精度需要（$n$+1）个点即可，需要注意的是，此公式中的$y_i$位置为其在从0到$n$个计算点之间的相对位置，而不是$u\left(x_i\right)$中实际网格的绝对位置。

当$x$方向使用$N$个网格点时，$\frac{\partial}{\partial x}(u)$可以使用公式（7）计算，且能保证其达到$n$阶精度，使用$n + 1$个格点（$n + 1$为从$N$个网格点中选取出的格点数，$n \leqslant N - 1$）。例如计算$x_i$点时，如果$n + 1$为奇数，这$n + 1$个格点可选为$\left(x_{i-n/2}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+n/2}\right)$（$x_{i-n/2}$对应$y_0$，…，$x_i$对应$y_{n/2}$，…，$x_{i+n/2}$对应$y_n$），使$x_i$位于中间点；如果$n + 1$为偶数，这$n$个格点可选为$\left(x_{i-(n+1)/2}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+(n+1)/2-1}\right)$，使$x_i$尽量靠近中间点；如果$x_i$靠近格点的左边界或右边界，而无法将其放于中心位置时，可以选取在左侧或右侧边界上能够覆盖$x_i$的连续$n$个格点即可。对于能使用周期边界条件而避免边界效应的方程，应尽量选取周期边界条件，这样可以保证$x_i$尽量靠近计算的中间点。

当$m \equiv 1$时，空间方向1阶导数的计算公式为

$$f_y(1)\left(y_i\right) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{n} d_{n+1,i,j}^{(1)} f\left(y_j\right). \tag{8}$$

计算时，空间导数的精度为$n$阶精度，为了保证空间导数能达到一定的精度，至少要求使用$n$+1个格点。例如取$N = 64$，若$n = 5$阶，则每次计算导数时需要6个格点，依此类推。具体的计算公式如下：

$$d_{2,0,1}^{(1)} = 1, d_{2,1,0}^{(1)} = -1, \tag{9}$$

$$d_{n+1,i,j}^{(1)} = \frac{(-1)^{(1-j)} a_{n-1,i,j}^{(0)}}{j!(n-j)!}, (\text{当 } i \neq j), \tag{10}$$

$$d_{n+1,i,i}^{(1)} = -\sum_{j=0, j\neq i}^{n} d_{n+1,i,j}^{(1)}, (\text{当 } i = j), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} a_{n-1,i,j}^{(0)} &= a_0\left(-i, \cdots, k-i, \cdots, n-i\right), \left(k \neq i, k \neq j\right) \\ &= (-i)\cdot(\cdots)\cdot(k-i)\cdot(\cdots)\cdot(n-i), \left(k \neq i, k \neq j\right) \end{aligned} \tag{12}$$

求解时每步逐个格点先计算空间差，后使用

RK法得到下一时刻的数值，全部格点计算完毕进入下一步积分，直到目标时刻，此即RKL方法对一维线性平流方程的求解过程。

### 2.2 二维线性平流方程的RKL算法

二维线性平流方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\ , \tag{13}$$

它的求解可按2.1节中RKL算法进行，

$$\begin{aligned} u_t^{(1)}\left(x_i,y_j\right) &= -\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y} \\ &\equiv -u_x^{(1)}\left(x_i,y_j\right)-u_y^{(1)}\left(x_i,y_j\right)\ , \end{aligned} \tag{14}$$

初始场为$u\left(x,y\right)|\,t=0=e^{-400\left[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2\right]}$。

更一般的二维平流方程的形式（Crowley, 1968）为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+v\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\ , \tag{15}$$

其中，$\varphi\left(x,y,t\right)$为待求解流；$u=u\left(x,y,t\right)$，$v=v\left(x,y,t\right)$为背景流场。

对于方程（15），可改写为

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(1)}\left(x_i,y_j\right) &= -u\left(x_i,y_j\right)\frac{\partial \varphi\left(x_i,y_j,t\right)}{\partial x}- \\ & v\left(x_i,y_j\right)\frac{\partial \varphi\left(x_i,y_j,t\right)}{\partial y}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

由于$\varphi_t^{(1)}\left(x_i,y_j\right)$可以用Li方法（Li，2005）计算出来，因此，后面的计算同一维情形，即可用RK格式求得下一时刻的数值解，且计算精度为$O\left(h^n+\tau^M\right)$，其中$M$、$n$分别为时间积分、空间差分的精度阶数。

为了检验算法的性能，设计如下旋转流场试验：

单位网格1×1中，格距$\Delta x=\Delta y=0.01$的流场进行逆时针旋转。风场取为以$\omega$为角速度的均匀旋转风场：$u=-\omega\left(y-y_c\right)$，$v=\omega\left(x-x_c\right)$，其中$\left(x_c,y_c\right)=(0.5,0.5)$为中心位置，角速度$\omega=2\pi/T$，$T=100$为周期，时间步长$\Delta t=1/100$，这样经过$T$时刻，旋转风场刚好回到原来的位置（经过10000个时间步长，绕中心点一周）。初始条件一般为一个定常流场。评价算法效果的辅助量为：

质量守恒比：$\sum\phi^2/\sum\phi_0{}^2$，

质量分布比：$\sum\phi/\sum\phi_0$，

峰值：$\phi_{\max}$，

最小值：$\phi_{\min}$.

初始场分布在单位方形区域中（0.5,0.65）处的二维高斯型初值：

$$\phi\left(x,y\right)|\,t=0=\mathrm{e}^{-400\left[(x-0.5)^2+(y-0.65)^2\right]}. \tag{17}$$

计算时$\Delta x=\Delta y=1/100$，$\Delta t=0.01$，

$$\begin{aligned} \varphi_{t=0}^{(1)}\left(x_i,y_j\right) &= -u^0\left(x_i,y_j\right)\frac{\partial \varphi^0\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}- \\ & v^0\left(x_i,y_j\right)\frac{\partial \varphi^0\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}\ , \end{aligned} \tag{18}$$

其中$\partial\varphi^0\left(x_i,y_j\right)/\partial x$这项可用Li算法求出，$\partial\varphi^0\left(x_i,y_j\right)/\partial y$同样处理，这样可以得到$\varphi^1\left(x_i,y_j\right)$，完成一步积分，重复这个过程直到计算完成。

### 2.3 RKL算法的多精度实现

高阶算法在计算时还会碰到一个问题就是舍入误差，因为计算所用的时空精度阶数都可能超过10阶，例如：Wang（2017）试验中，解的数值量级为$O(1)$，如果仅采用双精度计算，会发现高阶算法的绝对误差有时徘徊在$10^{-15}$，这恰好接近双精度计算时的相对误差极限，所以为了观察超高阶算法的计算效果，采用多精度计算是必要的。本研究使用了MP（Multiple-Precision）库，采用1024二进制位精度，相当于200位以上的十进制有效数字，足以区分绝对误差小到$10^{-200}$的数值解。

## 3 RKL方法的二维平流方程试验

仿照Takacs（1985）的做法，定义总误差为：$E=\sqrt{\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(u_D-u_T\right)^2}$，其中，$u_D$表示数值解，$u_T$表示理论解，$N$为平面上（$x,y$）方向的格点数，这里对平均误差方差取了根号，以保证总误差和原变量具有同样的量纲。

### 3.1 试验1：RKL算法求解二维线性平流方程时计算误差随时间的变化

二维平流方程（13）和（15）属于线性的系统，可以预期，计算误差随时间的增长速度不会像非线性系统那样迅速。但是计算时间增加时，计算机进行浮点计算的次数是线性增加的，因此，误差也不会是常数值。这个试验分为两组：

第一组试验为：数值计算方程（13）（图1a、1c），$x, y$方向的空间步长为$h = 1/200$，时间步长为$\tau = 1/400$，计算区域为$[0, 1] \times [0, 1]$，计算时间1～10（即400～4000步），空间阶数$n$统一取为10。图1a蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶算法的结果，其中误差值单位分别为$10^{-3}$、$10^{-5}$、$10^{-6}$、$10^{-7}$。从图1a可见，在RK算法阶数为$M$=3时，计算误差在$t$=1, 2, 3…, 10时基本呈现线性增长（$M$=3时，时间积分精度较低，斜率约为0.9，图1c）；对更高的空间精度阶$M = 4, 5, 6$也有类似的结果，而且斜率更接近于1。

第二组试验为：数值计算方程（15）（图1b、1d），$x, y$方向的空间步长为$h = 1/200$，时间步长为$\tau = 1/100$，计算区域为$[0, 1] \times [0, 1]$，旋转速度为100 s一周，计算时间100～1000 s，间隔100 s，空间阶数$n$统一取为20。图1b中蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶算法的结果，其中误差值单位分别为$10^{-8}$、$10^{-11}$、$10^{-14}$、$10^{-14}$。从图1b可见，在RK算法阶数为$M$=3时，计算误差在$t$=100, 200, …, 1000时基本呈现线性增长；同样对$M = 4, 5, 6$也有类似的结果，而且各种时间积分精度时，斜率都非常接近于1（图1d）。

这个试验结果表明，对二维平流方程的试验，在计算稳定的前提下，计算误差随时间增加的变化趋势近似为线性的。这个性质保证了，我们若想知道方程在第5个周期或第10个周期时计算误差的大小，只需要先得到其在1个周期时的误差，然后线性倍增即可。有了这个性质，在后面的数值试验中，我们都仅对一个周期的情况进行分析，来研究误差与时间积分精度和空间差分精度的关系。

### 3.2 试验2：RKL算法不同阶数求解二维平流系统（定常非旋转背景场）时计算误差的变化

数值求解平流方程方程（13），使用初始流函数条件：

$$u(x, y)|\, t = 0 = \mathrm{e}^{-400\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2\right]}. \qquad (19)$$

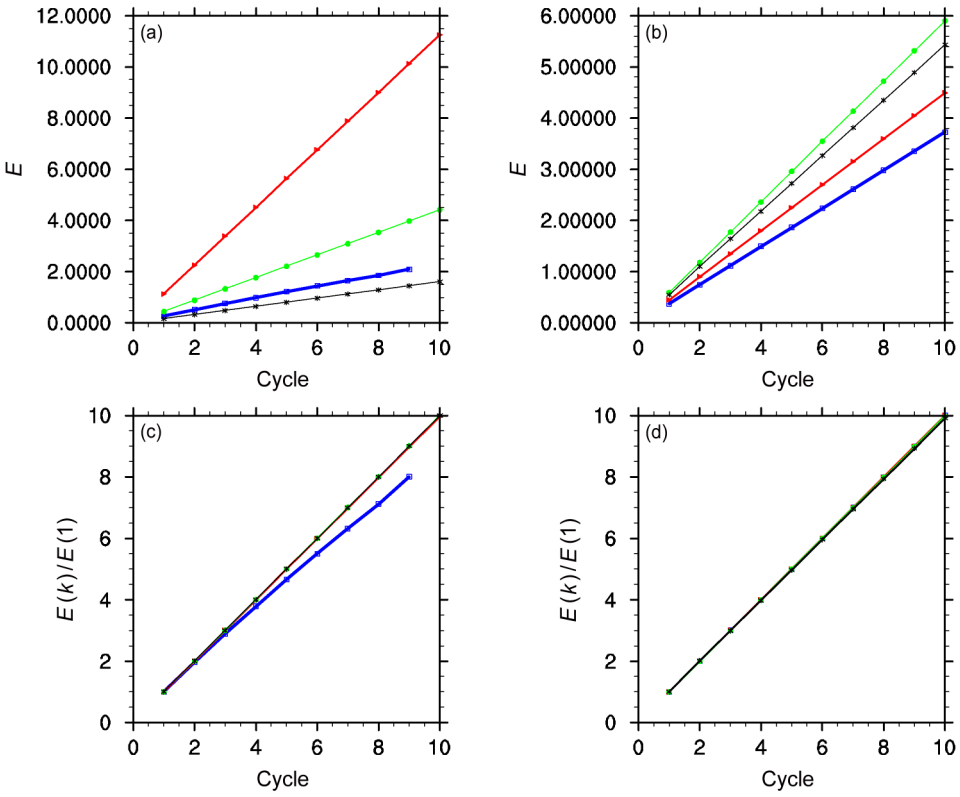


图1 （a）定常非旋转背景场、（b）定常旋转的背景场计算误差随时间周期的变化；（c）定常非旋转背景场、（d）定常旋转的背景场误差比随时间周期的变化。蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶算法的结果

Fig. 1 (a) The stationary non-rotated back-ground flow and (b) the stationary rotated back-ground flow error versus spatial difference order; the abscissa is the cycle order, the ordinate is the error; (c) and (d) are same as (a) and (b); the ordinate is the ratio of error versus cycles. The blue, red, green, and black curves denote the third, fourth, fifth, and sixth time-integration orders, respectively

计算时$x, y$方向的空间步长为$h = 1/200$，时间步长为$\tau = 1/400$，计算区域为$[0, 1]\times[0, 1]$，计算400步，试验结果如图2，从图2b可见，在RK算法阶数$M$为3时，空间阶数$n$达到5阶时，计算误差与$n$大于5阶时的计算误差相差不多；$M = 4$阶时，$n$达到7阶左右计算误差接近平缓变化；$M = 5$阶时，$n$达到9阶左右计算误差接近平缓变化；$M = 6$阶时，$n$达到10阶之后计算误差接近平缓变化。这些结果说明，本试验中总计算误差受时间积分精度的影响较大，当时间方向精度大于3阶时，空间方向的格式精度可以超过6阶。

### 3.3 试验3：RKL算法不同阶数求解二维平流系统（定常旋转背景场和Guass初值）时计算误差的变化

数值求解平流方程方程（15），使用背景流函数为

$$\begin{cases} u = -\omega\left(y - y_c\right), \\ v = \omega\left(x - x_c\right), \end{cases} \tag{20}$$

其中，$\left(x_c, y_c\right) = (0.5, 0.5)$为中心位置，角速度$\omega = 2\pi/T$，$T = 100$为周期，时间步长$\tau = 1/100$，初始场分布在单位方形区域中（0.50,0.65）处的二维高斯分布$\varphi(x, y)|\,t = 0 = \mathrm{e}^{-400\left[(x-0.5)^2 + (y-0.65)^2\right]}$。

本问题在$t$时刻的解析解为：

$$\varphi(x, y, t) = \mathrm{e}^{-400\left[(x-0.5+0.15\sin\omega t)^2 + (y-0.5-0.15\cos\omega t)^2\right]}, \tag{21}$$

可以用来检查计算时，$t$时刻数值解的误差和准确度。

从图3b可见，在RK算法阶数$M$为3时，空间阶数$n$达到10阶时，计算误差与$n$大于10阶时的计算误差相差不多；$M = 4$阶时，$n$达到16阶左右计算误差接近平缓变化；$M = 5$阶时，$n$达到22阶左右计算误差接近平缓变化；$M = 6$阶时，$n$达到22阶之后计算误差接近平缓变化。需要注意的是图3b中$M$=5和$M$=6结果的差别不是很大，这不是由于算法性能造成的，而是因为边界条件的问题。在使用无穷远边条件时，网格点外侧的数值被设置为0，因此，在靠近分布中心点的一侧边界处会有较大的边界误差，本例中它的量级为$10^{-22}$左右（$\mathrm{e}^{-400\times0.35^2} \approx 10^{-22}$，其他方向边界外也有大小不一的误差），这种误差是无法通过增加算法阶数来降低的，在经历10000步积分计算后，累积到约$10^{-16}$量级，这是此类旋转背景场数值求解时常见的问题（在拓展求解网格区域范围，或使分布中心点更接近于求解区域中心后，误差仍可以减小）。

表1给出了不同阶RKL方法，求解平流方程时，一个整周期后的数值结果辅助量。表中可见，$n$=2时，数值解计算误差较大，在$n$大于等于4阶之后，误差减小得很迅速，说明了高阶空间差分的重要性。表中的数据也可以看出，各阶（$M$=4,5,6表略）算法对应的最优空间差分阶数与图3b所得结果一致。

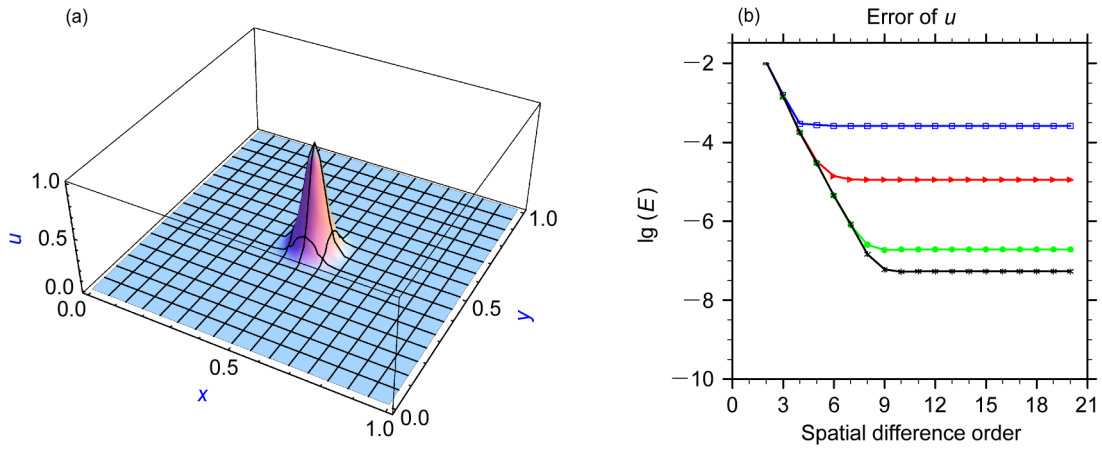


图2 RKL方法对非旋转背景场中二维平流系统的数值试验：（a）二维Gauss型初始场；（b）计算误差随空间精度阶数的变化，横坐标为空间精度阶数，纵坐标为误差取对数，蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶

Fig. 2 Experiments of the RKL method for 2D advection equation with non-rotated back-ground flow: (a) 2D Gaussian-type initial condition; (b) error versus spatial difference order, where the abscissa is the spatial difference order, and the ordinate is the logarithm of error, and the blue, red, green, and black curves denote the third, fourth, fifth, and sixth time-integration orders, respectively

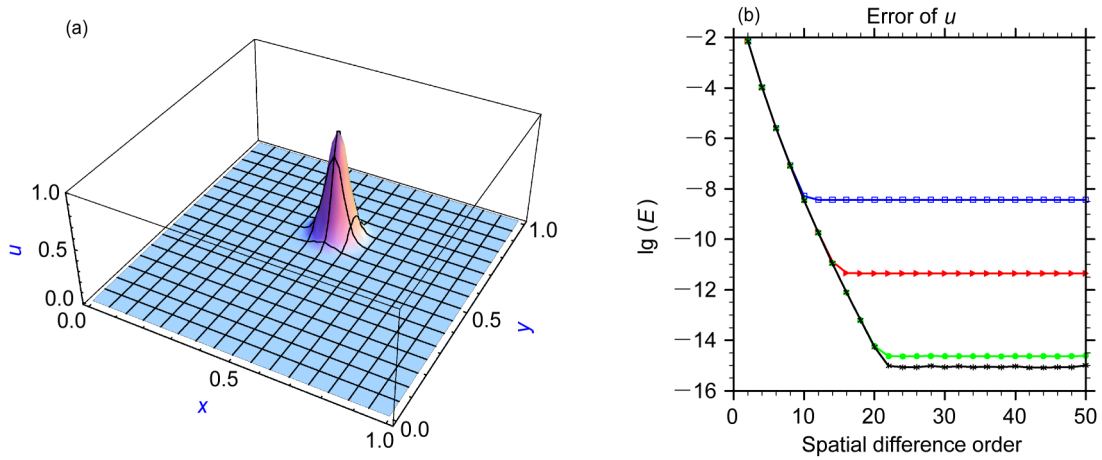


图3 RKL方法对旋转背景场中二维平流系统的数值试验：（a）二维偏心Gauss型初始场；（b）计算误差随空间精度阶数的变化，横坐标为空间精度阶数，纵坐标为误差取对数，蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶

Fig. 3 Experiments of the RKL method for 2D advection equation with rotated back-ground flow: (a) 2D eccentric Gaussian-type initial; (b) error versus spatial difference order, where the abscissa is the spatial difference order, the ordinate is the logarithm of error, and the blue, red, green, and black curves denote the third, fourth, fifth, and sixth time-integration orders, respectively

**表1 试验3 $M$=3时2～20阶空间算法在一个周期后的数值结果**

**Table 1 The results of Expt. 3 for $M$=3 and 2–20 spatial orders after one cycle**

| 阶数$n$ | 峰值$\varphi_{max}$ | 最小值$\varphi_{min}$ | 质量守恒比$\sum\varphi^2/\sum\varphi_0{}^2$ | 质量分布比$\sum\varphi/\sum\varphi_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.879100020605568 | −0.124604604217228 | 0.999999971228214 | 1.000000039247005 |
| 4 | 0.992180132405709 | −0.000169353166441 | 0.999999967498433 | 1.000000000147913 |
| 6 | 0.999725415095873 | −0.000000761431457 | 0.999999967287643 | 1.000000000001797 |
| 8 | 0.999984804894686 | −0.000000019569404 | 0.999999967272319 | 1.000000000000010 |
| 10 | 0.999998711406518 | −0.000000000811802 | 0.999999967270930 | 1.000000000000006 |
| 12 | 0.999999801165733 | −0.000000000039977 | 0.999999967270783 | 0.999999999999998 |
| 14 | 0.999999916787723 | −0.000000000002135 | 0.999999967270761 | 0.999999999999998 |
| 16 | 0.999999932451482 | −0.000000000000157 | 0.999999967270762 | 0.999999999999999 |
| 18 | 0.999999935045787 | −0.000000000000030 | 0.999999967270761 | 1.000000000000000 |
| 20 | 0.999999935554148 | −0.000000000000004 | 0.999999967270759 | 0.999999999999992 |

为了进一步分析计算误差，在图4中给出了一个整周期后，解析解和数值解的图像。图4a、4c、4e分别为解析解以及$n$=2、$n$=4时的数值解，可见当$n$=2时，可以通过观察原变量的分布，看出数值解的差异，随着计算误差的迅速减小，到$n$=4时，数值解和解析解从外观上已无明显差别。此时，分析数值解和解析解的差值场就显得必要了。图4d为$n$=2时误差场的分布，可见误差的量级在$10^{-1}$左右，而$n$=4时，通过观察误差场，可知误差的量级在$10^{-2}$左右。图4b则直接给出了$n$=20时误差场的情况，误差的量级在$10^{-8}$左右，与图3b结果吻合，且可以观察误差的细节。

总体来看，高阶算法较好地保持了高斯初始场的最大值，但结果并不正定，有些地方误差下冲和上翘。随着空间阶数的提高，非正定的解数量和数值减小，误差的绝对值减小，说明了算法是有效的。

### 3.4 试验4：RKL算法不同阶数求解二维平流系统（定常旋转背景场和圆锥初值）时计算误差的变化

数值求解平流方程方程（15），使用背景流函数条件：

$$\begin{cases} u = -\omega\left(y - y_0\right), \\ v = \omega\left(x - x_0\right), \end{cases} \tag{22}$$

其中$\left(x_0, y_0\right)=(0.5, 0.5)$为中心位置，角速度$\omega=2\pi/T$，$T$=100为周期，初始场分布在边长1单位的方形区域中（0.5,0.65）处，高度为0.05，底边长为0.15的圆锥分布。时间步长$\tau$=0.01，格距$\Delta x=\Delta y$=0.01，

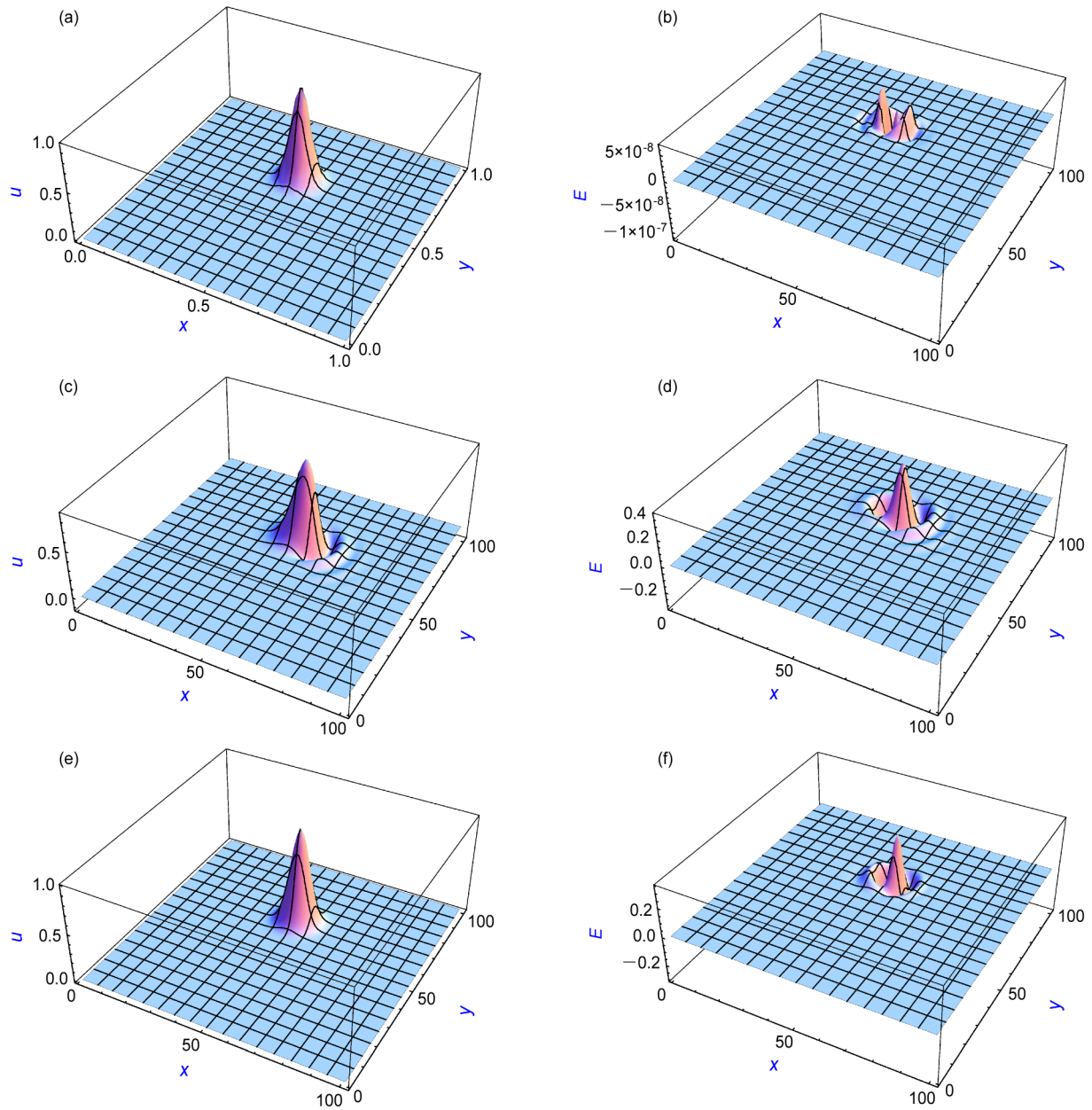


图4　RKL方法对旋转背景场且高斯初值的数值试验：（a）一个周期后的解析解；（b）$M$=3、$n$=20时，一个周期后的误差分布；（c）$M$=3、$n$=2时，一个周期后的数值解；（d）$M$=3、$n$=2时误差的分布；（e）$M$=3、$n$=4时，一个周期后的数值解；（f）$M$=3、$n$=4时误差的分布

Fig. 4　Experiments of the RKL method for 2D advection equation with rotated back-ground flow and Gauss initial condition: (a) The analytical solution at one cycle; (b) the error for $M$=3, $n$=20 at one cycle; (c) the numerical solution for $M$=3, $n$=2 at one cycle; (d) same as (b) but for $M$=3, $n$=2; (e) same as (c) but for $M$=3, $n$=4; (f) same as (b) but for $M$=3, $n$=4

$$\varphi(x,y)|\,t=0=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\left(0.15-\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.65)^2}\right), & 0.15-\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.65)^2}>0\\ 0, & 0.15-\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.65)^2}\leqslant 0\end{cases}\tag{23}$$

对于$t$时刻，本问题的解析解为

$$\varphi(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\left(0.15-\sqrt{(x+0.15\sin\omega t-0.5)^2+(y-0.15\cos\omega t-0.5)^2}\right), & \varphi>0\\ 0, & \varphi\leqslant 0\end{cases}\tag{24}$$

**表2 试验4 $M$=3时2～20阶空间算法在一个周期后的数值结果**

**Table 2 The results of Expt. 4 for $M$=3 and 2–20 spatial orders after one cycle**

| 阶数$n$ | 峰值$\varphi_{max}$ | 最小值$\varphi_{min}$ | 质量守恒比$\sum\varphi^2/\sum\varphi_0{}^2$ | 质量分布比$\sum\varphi/\sum\varphi_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.042318753697406 | −0.002800692371273 | 0.999999994209685 | 1.000062933094572 |
| 4 | 0.046231988037969 | −0.001137179417055 | 0.999999991550428 | 0.999966164053762 |
| 6 | 0.047280910735204 | −0.000680662711126 | 0.999999990009599 | 0.999921329745270 |
| 8 | 0.047795666155995 | −0.000576925951550 | 0.999999988923466 | 1.000124481331269 |
| 10 | 0.048480548160954 | −0.000527735633149 | 0.999999988089010 | 0.999711808219621 |
| 12 | 0.048219850602400 | −0.000424685811891 | 0.999999987415918 | 1.000054475441748 |
| 14 | 0.048356003628113 | −0.000497981071535 | 0.999999986855287 | 1.000148478289969 |
| 16 | 0.048388162916222 | −0.000420520571531 | 0.999999986377255 | 1.000102379809374 |
| 18 | 0.048897879942690 | −0.000409597789869 | 0.999999985962188 | 1.000130274756059 |
| 20 | 0.048838700505789 | −0.000401733081757 | 0.999999985596455 | 1.000124068446893 |

可以用来检查计算时，$t$时刻数值解的误差和准确度。

从图5b可见，这个圆锥型初值的误差分布曲线与图3b明显不同。首先是$M$=3, 4, 5, 6等不同阶的时间积分算法的曲线基本重合在一起，暗示此算例中时间积分精度的影响不大。其次，计算误差随空间差分阶数增加有减小的趋势，但减小的速度较慢，仅从$n$=2时的$10^{-3}$减小到$n$=20的$10^{-4}$量级。

图5c–5f可以看到，空间阶数$n$=2、4、6、8时，一个整周期后数值解的分布情况。当$n$=2时，可以通过观察原变量的分布，看出数值解的差异，随着$n$的增加，计算误差在减小，到$n$=4、6、8时数值解和解析解的差别逐渐变小，这从原变量图中即可看出。

表2给出了不同空间阶数RKL方法完成试验4时，一个整周期后的数值结果统计数据。表2中可见，$n$=2时，数值解计算误差较大，在$n$≥10阶之后，误差变化不明显，这与表1中的辅助量变化形式不同。

试验4结果说明：高阶算法对此类具有导数不连续点的算例，效果不如Guass初始场的好。数值结果不能保持正定，有些地方误差下冲和上翘。随着空间差分精度的提高，非正定的解数量和数值会减小，误差的绝对值减小，说明了算法在一定程度上是有效的，但并不适合追求极高的算法阶数。这样的结果，与谱方法中的导数不连续问题有些相似，误差的产生主要源于导数的不连续性，差分类方法仅能获得导数连续性阶数相当的算法精度。

值得一提的是，若数值解能够具有周期边界条件，求解精度会比非周期边界条件的高，这主要是周期边界条件满足时，总可以将目标格点放置于差分公式中的中点附近，计算时误差小（如试验2）。而非周期的边界条件，在边界点以及紧靠边界点处，即使能够用$n$阶精度的差分格式，目标格点也会被放置于偏离$n$个差分点中心的位置，实际计算表明这些位置的差分精度较差。若可以近似的使用无穷远边条件（例如，边界外的值趋向于0，且很小），可以将边界外的设置为0值，以便保证相应的差分格式有足够多的有效格点来保持计算精度（如试验3和试验4）。

## 4 结论

本文利用Li提出的高阶显式微分公式，结合Runge-Kutta时间积分方案，实现了求解含时偏微分方程的Runge-Kutta-Li高阶算法格式。对二维线性平流方程，通过比较理论解和各阶计算格式的数值解，研究了计算误差随时间积分阶数的变化情况。结果表明：在计算稳定的条件下，各算法的计算误差随时间的推移基本上是线性增加的。一个非转动背景场的平流算例中（高斯型的初值），高阶RKL算法可以取得较好的计算效果。如果时间方向的积分精度为3阶，计算误差在空间差分阶数到达一定阶数后减小的不明显。而当时间积分的阶数大于3，例如选为4、5、6阶时，此时空间差分的

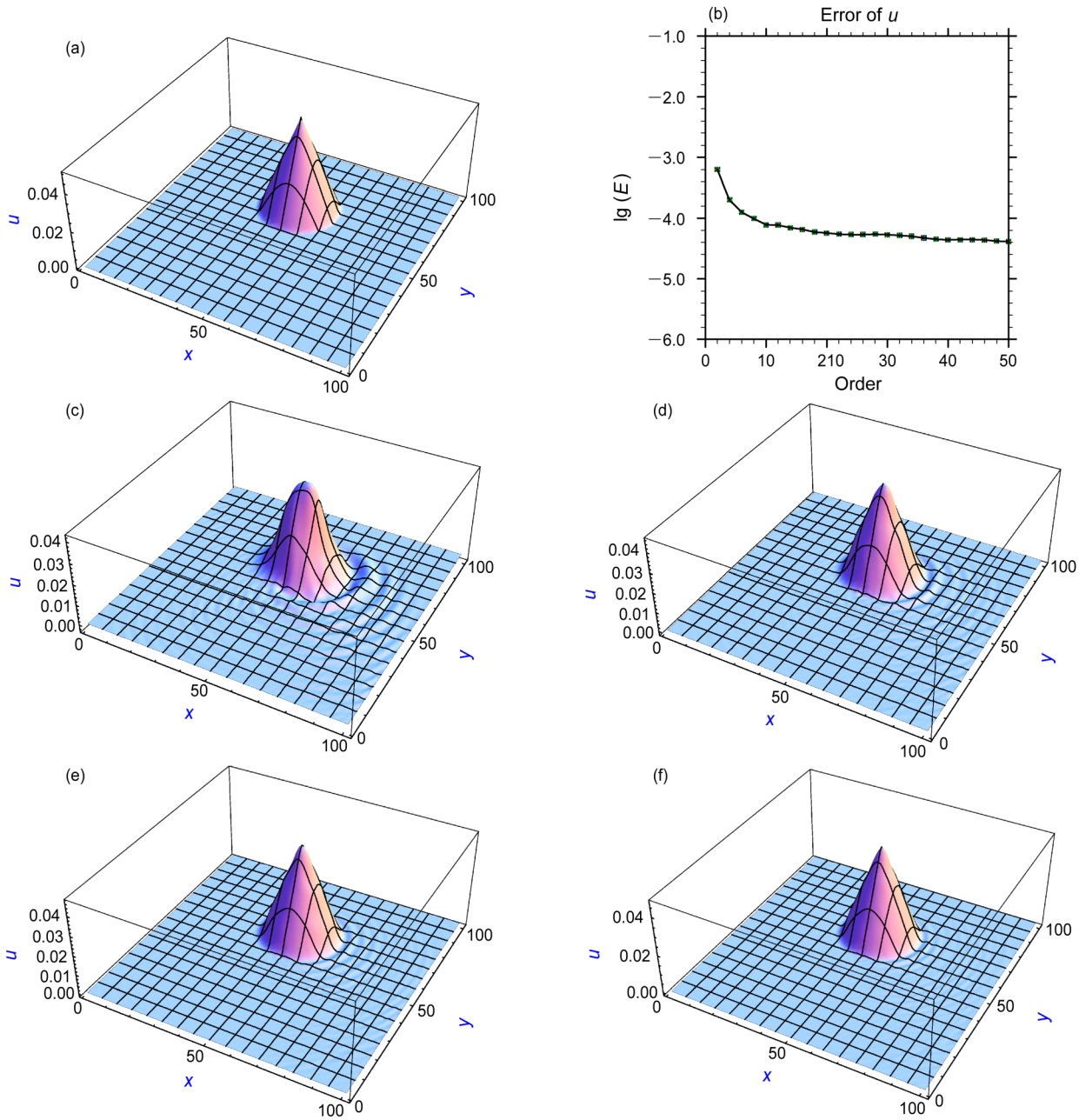


图5 RKL方法对旋转背景场且圆锥初值的数值试验：（a）二维圆锥型初始场；（b）计算误差随空间精度阶数的变化[纵坐标为误差取对数，蓝、红、绿、黑色分别代表时间精度为3、4、5、6阶]；（c）$M$=3、$n$=2时，一个周期后的数值解；（d）同（c），但$n$=4；（e）同（c），但$n$=6；（f）同（c），但$n$=8

Fig. 5 Experiments of the RKL method for 2D advection equation with rotated back-ground flow and cone initial condition: (a) 2D cone-type initial condition; (b) error versus spatial difference order, where the abscissa is the spatial difference order; the ordinate is the logarithm of error; and the blue, red, green, and black curves denote the third, fourth, fifth, and sixth time-integration orders, respectively; (c) the numerical solutions of $M$=3，$n$=2 at one cycle; (d) same as (c) but for $n$=4; (e) same as (c) but for $n$=6; (f) same as (c) but for $n$=8

最优阶数比$M$=3时的最优空间阶数要大，说明计算误差在空间差分精度达到一定阶数而出现饱和的现象是由于没有足够高的时间积分方案配合而引起的。

定常转速的背景场算例中（采用偏心的高斯型初值），当RK算法阶数为3时，最优空间差分阶数为10；相应的$M$=4, 5, 6时对应的空间最优阶为16、22、22，计算误差可以控制在$10^{-15}$～$10^{-16}$。高阶算法较好地保持了高斯初始场的最大值，随着精度的提高，误差的绝对值减小很迅速，说明算法是

非常有效的。对于圆锥型初值（定常转速的背景场），4、5、6阶RK算法和3阶算法的效果差不多。高阶算法对此类具有导数不连续点的算例，效果不如高斯型初始场的好。数值解也不能保持正定，有些地方误差下冲和上翘。随着空间差分精度的提高，非正定的解数量和数值减小，误差的绝对值减小，说明了算法在一定程度上是有效的，但并不适合追求极高的算法阶数。这与谱方法中的导数不连续问题有些相似，误差的产生主要源于导数的不连续性，差分类方法仅能获得导数连续性阶数相当的算法精度。上述算例中，采用恰当的边界条件是非常必要的，例如旋转背景场算例，比较适合使用无穷远边界条件，否则会出现计算不稳定或无法将计算误差控制到较小的范围内。

虽然可以通过减小时间步长来改进时间积分的精度，但是它的效率不如增加阶数高，这在以往的研究中已经被论证（Wang et al., 2012）。因此，相比于以往的仅增加空间差分精度的高阶算法，本文在时空两个方向提高算法的精度阶数，减少了总体计算误差。为了控制高阶算法计算过程中浮点舍入误差的影响，使用多精度计算的工具库实现了可以求解二维平流方程的RKL格式，此方法可以方便的拓展到其他类似方程的求解中。

二维平流方程还有更为复杂的背景流场，如Smolarkiewicz变形流场（Smolarkiewicz, 1982; Staniforth et al., 1987）。该流场可用于研究由流函数定义的流场内标量分布的平流，反映了彼此对称的涡旋作用下平流场的运动特性。对这类较复杂的背景流场，使用欧拉框架下的算法通常无法取得特别好的计算效果，因此，能否拓展高精度算法，在拉格朗日描述（Staniforth and Côté, 1991）的框架下处理这种问题，将在今后的工作中进行研究。

## 参考文献（References）


Butcher J C. 2008. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (2nd ed.) [M]. England: Wiley, 463pp.

陈显尧, 宋振亚, 赵伟, 等. 2008. 气候模式系统模拟结果的不确定性分析 [J]. 海洋科学进展, 26(2): 119−125. Chen Xianyao, Song Zhenya, Zhao Wei, et al. 2008. Uncertainity analysis of results simulated by climate model system [J]. Advances in Marine Science (in Chinese), 26(2): 119−125. doi: 10.3969/j. issn. 1671-6647.2008.02.001

Crowley W P. 1968. Numerical advection experiments [J]. Mon. Wea. Rev., 96(1): 1−11. doi: 10.1175/1520-0493(1968)096<0001:NAE>2.0.CO;2

冯涛, 李建平. 2007. 高精度迎风偏斜格式的比较与分析 [J]. 大气科学, 31(2): 245−253. Feng Tao, Li Jianping. 2007. A comparison and analysis of high order upwind-biased schemes [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 31(2): 245−253. doi: 10.3878/j.issn.1006-9895.2007.02.06

Hairer E, Nørsett S P, Wanner G. 1993. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 528pp.

Hopf E. 1950. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$ [J]. Commun. Pure Appl. Math., 3(3): 201−230. doi: 10.1002/cpa.3160030302

季仲贞, 王斌. 1994. 一类高时间差分精度的平方守恒格式的构造及其应用检验 [J]. 自然科学进展—国家重点实验室通讯, 4(2): 149−157. Ji Zhongzhen, Wang Bin. 1994. Construction and application test of a kind of high precision scheme with square-conservation [J]. Progress in Natural Science (in Chinese), 4(2): 149−157.

Lele S K. 1992. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. J. Comput. Phys., 103(1): 16−42. doi: 10.1016/0021-9991(92)90324-R.

Li J P. 2005. General explicit difference formulas for numerical differentiation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 183(1): 29−52. doi:10.1016/j.cam.2004.12.026

Li J P, Zeng Q C, Chou J F. 2000. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations (I)——Numerical results [J]. Science in China (Ser. E), 43(5): 449−460.

Liao S J. 2008. On the reliability of computed chaotic solutions of non-linear differential equations [J]. Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography, 61(4): 550−564. doi: 10.1111/j. 1600-0870.2009.00402.x

Ma Y W, Fu D X. 1996. Super compact finite difference method (SCFDM) with arbitrary high accuracy [J]. Comput. Fluid Dyn. J., 5 (2): 259−276.

Smolarkiewicz P K. 1982. The multi-dimensional crowley advection scheme [J]. Mon. Wea. Rev., 110(12): 1968−1983. doi:10.1175/1520-0493(1982)110<1968:TMDCAS>2.0.CO;2

Staniforth A, Côté J. 1991. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models—A review [J]. Mon. Wea. Rev., 119(9): 2206−2223. doi:10.1175/1520-0493(1991)119<2206:SLISFA>2.0.CO;2

Staniforth A, Côté J, Pudykjewicz J. 1987. Comments on “swolarkiewicz's deformational flow” [J]. Mon. Wea. Rev., 115(4): 894−900. doi:10.1175/1520-0493(1987)115<0894:CODF>2.0.CO;2

Takacs L L. 1985. A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors [J]. Mon. Wea. Rev., 113 (6): 1050−1065. doi:10.1175/1520-0493(1985)113<1050:ATSSFT>2.0.CO;2

Tal-Ezer H. 1986. Spectral methods in time for hyperbolic equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23(1): 11−26. doi:10.1137/0723002

Tal-Ezer H. 1989. Spectral methods in time for parabolic problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 26(1): 1−11. doi: 10.1137/

0726001

Teixeira J, Reynolds C A, Judd K. 2007. Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: Numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design [J]. J. Atmos. Sci., 64(1): 175–189. doi:10.1175/JAS3824.1

von Neumann J, Goldstine H H. 1947. Numerical inverting of matrices of high order [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (11): 1021–1099. doi:10.1090/S0002-9904-1947-08909-6

Wang P F. 2017. A high-order spatiotemporal precision-matching Taylor–Li scheme for time-dependent problems [J]. Advances in Atmospheric Sciences, 34(12): 1461–1471. doi:10.1007/s00376-017-7018-1

王鹏飞, 王在志, 黄刚. 2007. 舍入误差对大气环流模式模拟结果的影响 [J]. 大气科学, 31(5): 815–825. Wang Pengfei, Wang Zaizhi, Huang Gang. 2007. The influence of round-off error on the atmospheric general circulation model [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 31(5): 815–825. doi: 10.3878/j.issn.1006-9895.2007.05.06

Wang P F, Li J P, Li Q. 2012. Computational uncertainty and the application of a high-performance multiple precision scheme to obtaining the correct reference solution of Lorenz equations [J]. Numerical Algorithms, 59(1): 147–159. doi: 10.1007/s11075-011-9481-6

Wang P F, Liu Y, Li J P. 2014. Clean numerical simulation for some chaotic systems using the parallel multiple-precision Taylor scheme [J]. Chinese Science Bulletin, 59(33): 4465–4472. doi: 10.1007/s11434-014-0412-5

王鹏飞, 楚苹瓌, 王立志, 等. 2019. Runge-Kutta 算法与 Li 差分法不同阶数配合对计算精度影响研究 [J]. 大气科学, 43(1): 99–106. Wang Pengfei, Chu Pingxiang, Wang Lizhi, et al. 2019. A study on the precision of Runge-Kutta method with various orders of Li difference scheme [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 43(1): 99–106. doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1805.17238

吴声昌, 刘小清. 1996. KdV 方程的时间谱离散方法 [J]. 应用数学和力学, 17(4): 357–362. Wu Shengchang, Liu Xiaoqing. 1996. Spectral method in time for KDV equations [J]. Applied Mathematics and Mechanics (in Chinese), 17(4): 357–362.