卢文旭, 段明铿, 王革丽. 2020. 基于慢特征分析对连续系统的外强迫提取 [J]. 气候与环境研究, 25(2): 153−162. LU Wenxu, DUAN Mingkeng, WANG Geli. 2020. External Forcing Extraction of Continuous Systems Based on Slow Feature Analysis [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 25 (2): 153−162. doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2019.18158

基于慢特征分析对连续系统的外强迫提取

卢文旭[1, 2] 段明铿[1] 王革丽[2]

1 南京信息工程大学大气科学学院，南京 210044
2 中国科学院大气物理研究所中层大气与全球环境探测重点实验室，北京 100029

摘 要 外强迫随时间的变化对于非平稳系统的影响十分重要，如何从该系统中重构或提取外强迫信息则成为研究其中动力学特征的关键所在。本文基于慢特征分析方法（Slow Feature Analysis，SFA）以连续系统（改变的 Lorenz 系统）为参考模型，分别讨论在周期型强迫、减弱的周期型强迫、指数衰减型强迫、伴随指数衰减的周期型强迫等条件下，SFA 方法对模型中不同强迫信号的提取能力。结果显示，SFA 方法能够提取作用于连续系统中的外强迫信息，其提取效果与外强迫的强度、噪声以及嵌入维数 *m* 有关：对于越弱的外强迫或者存在越强的噪声干扰，提取效果越差，提取信号中将出现虚假的高频波动；嵌入维数 *m* 的增大能在一定程度上提高外强迫信号的提取效果。试验还表明，作用在单一变量上的外强迫会将其驱动信息嵌入于系统中，因此，可以通过 SFA 分析方法从其他变量中提取其外强迫信号。

关键词 慢特征分析方法 驱动力 非平稳系统 连续系统
文章编号 1006-9585(2020)02-0153-10 **中图分类号** P468 **文献标识码** A
doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2019.18158

External Forcing Extraction of Continuous Systems Based on Slow Feature Analysis

LU Wenxu[1, 2], DUAN Mingkeng[1], and WANG Geli[2]

1 *College of Atmospheric Sciences*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044
2 *Key Laboratory of Middle Atmosphere and Global Environment Observation*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029

Abstract The influence of gradual external forcing changes on non-stationary system is significant, and the manner by which external forcing features are reconstructed from non-stationary system has become the key to study the dynamic characteristics of the system. In this study, a continuous system (the modified Lorenz system) is used as the reference model, based on the slow feature analysis (SFA). We discuss the ability of SFA in extracting different forcing signals in the model under conditions of periodic forcing, weakened periodic forcing, exponential decay forcing, and periodic forcing with exponential decay. Results show that the SFA method can extract external forcing information acting on the continuous system and its extraction effect is correlated to the intensity of the external forcing, noise, and embedding dimension *m*: The weaker the external forcing or the stronger the noise interference, the worse the extraction effect. Hence, the false high-frequency fluctuation appears in the extracted signal. The increase in embedding dimension *m* can improve the extraction effect of the external forcing signal to a certain extent. The results also shows that the external

收稿日期 2018-12-12；**网络预出版日期** 2019-06-21
作者简介 卢文旭，男，1995 年出生，硕士研究生，主要从事非线性大气动力学研究。E-mail: 549083189@qq.com
通讯作者 王革丽，E-mail: wgl@mail.iap.ac.cn
资助项目 国家自然科学基金项目 91737102、41575058
Funded by National Natural Science Foundation of China (Grants 91737102 and 41575058)

forcing acting on a single variable embeds its driving information in the system and SFA can extract the external forcing signal from other variables.

Keywords Slow feature analysis, Driving force, Non-stationary system, Continuous system

1 引言

气候系统作为一个复杂系统（杨培才等, 2003），其变化不仅敏感于初值，还受到外部驱动力的影响，而外部驱动力和系统的稳定性息息相关。目前，大部分的非线性时间序列的预测理论都建立在状态分布是平稳的、外部强迫与时间变化无关的条件下，由此可以在“遍历性”理论的基础上，利用历史资料构建预测方程。但是，越来越多的研究成果表明，气候过程其本质上是非平稳的，气候变暖就是一个很明显的例子；同时，对于降水而言，Tsonis et al.（1996）对长时间尺度的全球降水的年代际变化进行了分析，结果发现降水的均值并没有发生显著变化，而极端降水的发生频次有显著提高，宋世凯（2017）在对中国 1960～2014 年降水时空变化分析中，也得出类似的结论。而外强迫随时间变化是产生其非平稳现象的原因之一，它也可以看作成气候层次结构中的控制层，其变化最为缓慢，这种慢变的过程影响并控制着快变的信号（杨培才等, 2003）。

当前，从非平稳的时间序列中提取外强迫的方法主要包含两种，Wiskott and Sejnowski（2002）提出的慢特征分析算法以及 Verdes et al.（2001）提出的利用近邻时段的交叉预报误差的方法来反演外强迫的变化。然而，交叉预报方法在当时间序列具有平稳段落时，它对于外强迫信号的提取能力将受限。因此，本文将采用慢特征分析法进行提取非平稳连续系统中的外强迫信号实验。

慢特征分析法（Slow Feature Analysis，SFA）最先被运用于神经生物学（Berkes and Wiskott, 2005），成功的提取了生物视觉皮层中的观感信号的诸多特征（Turner and Sahani, 2007）。其算法主要目的是在于从一组快变的时间序列中提取缓变的部分。后来慢特征分析法被成功推广到计算机领域，并在信号处理方面大放异彩（马奎俊等, 2011; 蒋昕祎等, 2018）。慢特征分析方法还被运用于气候预测当中，Wang et al.（2013）以及陈潇潇等（2015）分别对气温数据和气溶胶浓度数据进行预测建模，结果表明在引入 SFA 提取的外强迫信息之后，预测模型的精度能得到进一步提高。

从非平稳系统中提取外强迫信号的理想实验，已经取得了一些结果。例如：Zhang et al.（2017）通过改进的基于交叉预测误差的非平稳系统驱动力重构方案，成功地从 Logistic、Hassell、Moran-Ricker 等模型中提取出外强迫信息；潘昕浓等（2017）构造由多层驱动力控制的 Logistic 模型，结果表明，当最慢层驱动控制着次慢层变化，再由次慢层作用在 Logistic 模型中，可以用连续两次使用慢特征分析进行驱动力信息的提取，第一次可以重构出次慢层的驱动信息，第二次可以提取最慢层驱动信息；范开宇等（2018）则使用 Henon 模型进行驱动力提取实验，对于双时变驱动控制下的 Henon 模型，SFA 分析会给出两个强迫的一种组合序列，可以通过结合小波分析，将两个驱动信号从中分离提取。

然而，上述关于 SFA 的理想试验都聚焦于离散的时间序列，且所使用的模型均为一维模型，也就是说，SFA 方法对提取一维离散系统中的外强迫信息具有一定的能力。但真实的气候系统是连续的，更是多维的，若要将其进一步运用于实际大气的研究中，仅仅关注一维离散模型下的试验是远远不够的。因此，为了进一步测试 SFA 对多维、连续的非平稳模型中提取外强迫信息的能力，本文将以 Lorenz 模型为基础，通过给定不同类型的外强迫信号，在保证模型处于非平稳状态的条件下，讨论 SFA 提取信号与真实强迫信号之间的异同。

2 模型与方法

2.1 Lorenz 模型

1963 年美国著名气象学家 Lorenz 提出了 Lorenz 模型（Lorenz, 1963），同时还开创性的提出了“蝴蝶效应”，为研究混沌现象拓宽了思路。Lorenz 模型是描述大气对流等问题的简化模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}, \quad (1)$$

其中，x、y、z 分别表示对流的垂直速度、上下层

流体间的温度差、垂直方向上的温度梯度，$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$分别表示 x、y、z 对时间的倒数；ρ 为 Rayleigh 数，是系统的控制变量；σ 为无量纲因子，称作为 Prandtl 数；β 为速度阻尼常数。当 σ=10, β=8/3, ρ=28 时，系统出现混沌现象并且产生奇异吸引子。本文采用四阶 Runge-Kutta 算法求解 Lorenz 方程，且在本文试验中，主要利用其数学模型，而不讨论其中的物理意义。

2.2　慢特征分析方法 SFA

慢特征分析是建立在相空间重构理论（Packard et al, 1980）和 Takens（1981）提出的嵌入定理上的一种无监督算法，它的主要思想是从快变的非平稳时间序列中，提取出变化缓慢的部分或者缓变部分的组合（Konen and Koch, 2009）。其算法和低通滤波有着本质的区别，计算步骤如下：

（1）对于一个非平稳时间序列$\{\boldsymbol{x}(t)\}_{t=t_1,t_2,\ldots,t_n}$，令其嵌入进时滞参数 τ=1、嵌入维数为 m 的状态空间$\boldsymbol{X}(t)$中，

$$\boldsymbol{X}(t)=\{\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\ldots,\boldsymbol{x}_m(t)\}_{t=t_1,t_2,\ldots,t_N}, \tag{2}$$

其中，N=n−m+1。

（2）对状态空间 $\boldsymbol{X}(t)$ 进行非线性扩展至 k 维的 $\boldsymbol{H}(t)$ 中，扩展方式如下所示：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(t)&=\{\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\ldots,\boldsymbol{x}_m(t),\boldsymbol{x}_1(t)\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_1(t)\boldsymbol{x}_2(t),\ldots,\\&\quad\boldsymbol{x}_{m-1}(t)\boldsymbol{x}_m(t),\boldsymbol{x}_m(t)\boldsymbol{x}_m(t)\}_{t=t_1,\ldots,t_N}\\&=\{\boldsymbol{h}_1(t),\boldsymbol{h}_2(t),\ldots,\boldsymbol{h}_m(t),\boldsymbol{h}_{m+1}(t),\boldsymbol{h}_{m+2}(t),\ldots,\\&\quad\boldsymbol{h}_{k-1}(t),\boldsymbol{h}_k(t)\}_{t=t_1,\ldots,t_N},\end{aligned} \tag{3}$$

其中，维数$k=m+m(m+1)/2$。

（3）$\boldsymbol{H}(t)$ 进行白化处理得到同样 k 维的 $\boldsymbol{Z}(t)$，使得其协方差矩阵为单位阵，且满足均值为 0，即：$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\bar{\boldsymbol{Z}}=0$。

（4）构造速度矩阵$\dot{\boldsymbol{Z}}(t)$，使得$\dot{\boldsymbol{Z}}_j(t_i)=Z_j(t_{i+1})-\boldsymbol{Z}_j(t_i)$，

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t)=\left\{\dot{\boldsymbol{Z}}_1(t),\dot{\boldsymbol{Z}}_2(t),\ldots,\dot{\boldsymbol{Z}}_k(t)\right\}_{t=t_1,t_2,\ldots,t_N}. \tag{4}$$

（5）对矩阵$\left\langle\dot{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\right\rangle$进行主成分分析，求其特征值$\lambda$与特征向量，并得到其权重系数$\omega$，则相应权重系数所对应的输出函数为$\boldsymbol{g}_j(t)=\omega_j\boldsymbol{z}(t)$，对其积分得到输出信号$\boldsymbol{y}_j(t)$：

$$\boldsymbol{y}_j(t)=r\omega_j z(t)+c. \tag{5}$$

当选取最小的特征值时，所得到的输出信号就是所求的变化最慢的信号，我们将这最慢信号称作为作用在系统中的外强迫信号，它和实际的强迫信号相差一个振幅因子 r 和一个平移因子 c。

3　模型试验

本节将在 Lorenz 模型中（公式 1），通过调整系数 σ、β、ρ，使其随时间缓慢变化，成为时变序列，再使用 SFA 慢特征分析提取其强迫特征，观察提取的强迫信号与真实强迫信号是否一致。在所有的试验中，初值都给定$x(1)=y(1)=z(1)=10^{-17}$，选取计算步长 Δt 为 0.1，时间 t 的区间取为 [0, 8000]，即共取点 80001 个。再分别对变量 x、y、z 计算结果中后 30000 个点进行 SFA 分析。在 SFA 分析中，取时滞参数 τ=1，并通过改变嵌入维数 m 的大小，来讨论提取信号与真实强迫信号之间的相关程度与嵌入维数 m 的关系。最后，SFA 提取信号与真实信号均采用标准化的处理。

其中 3.1 节和 3.2 节主要讨论周期型的强迫信号及该信号减弱时的情况；3.3 节则讨论仅考虑指数衰减时的情况；3.4 节在 3.1 与 3.3 节的基础上，进一步讨论了在多种强迫以乘积形式共同作用于系统中的情形，分析不同的强迫形式对 SFA 提取效果的影响；3.5 节在 3.1 节的基础上，简单讨论了噪声的影响。在所有的试验中通过加入不同的强迫信号，结果显示 Lorenz 模型的稳定性并没有受到破坏，Lorenz 奇异吸引子的“蝴蝶”结构仍然存在。

3.1　周期型强迫试验

在 Lorenz 模型中（公式 1），构造三角函数形式的周期型外强迫，并使其作用于 y 上，令外部强迫$\rho=28+\cos(t\pi/1000)$。另外两个参数保持不变，$\sigma=10,\beta=8/3$。结果表明，通过调整嵌入维数 m 的值，可以分别从系统中 3 个变量提取出外强迫信号。但不同的变量对 SFA 提取时所使用的最小嵌入维数 m 的是不同的。其中变量 z 对外强迫的响应最为敏感，当 m=10时，就可以从 SFA 提取的强迫信息中发现显著的周期波动的特征，与真实强迫信号有较好的一致性，而 x、y 的提取信号中并没有显著的特征（图 1a）。当把嵌入维数 m 增加至 23 时，才可以从 x、y 提取的强迫信息中发现真实强迫的波动特征，且对 x 的提取效果要略高于 y，而此时从 z 中提取的强迫信号和真实外强迫已基本达到重合，提取出的强迫信号曲线更加平滑（图 1b）。当把 m 增大至 30，甚至到 60 时，

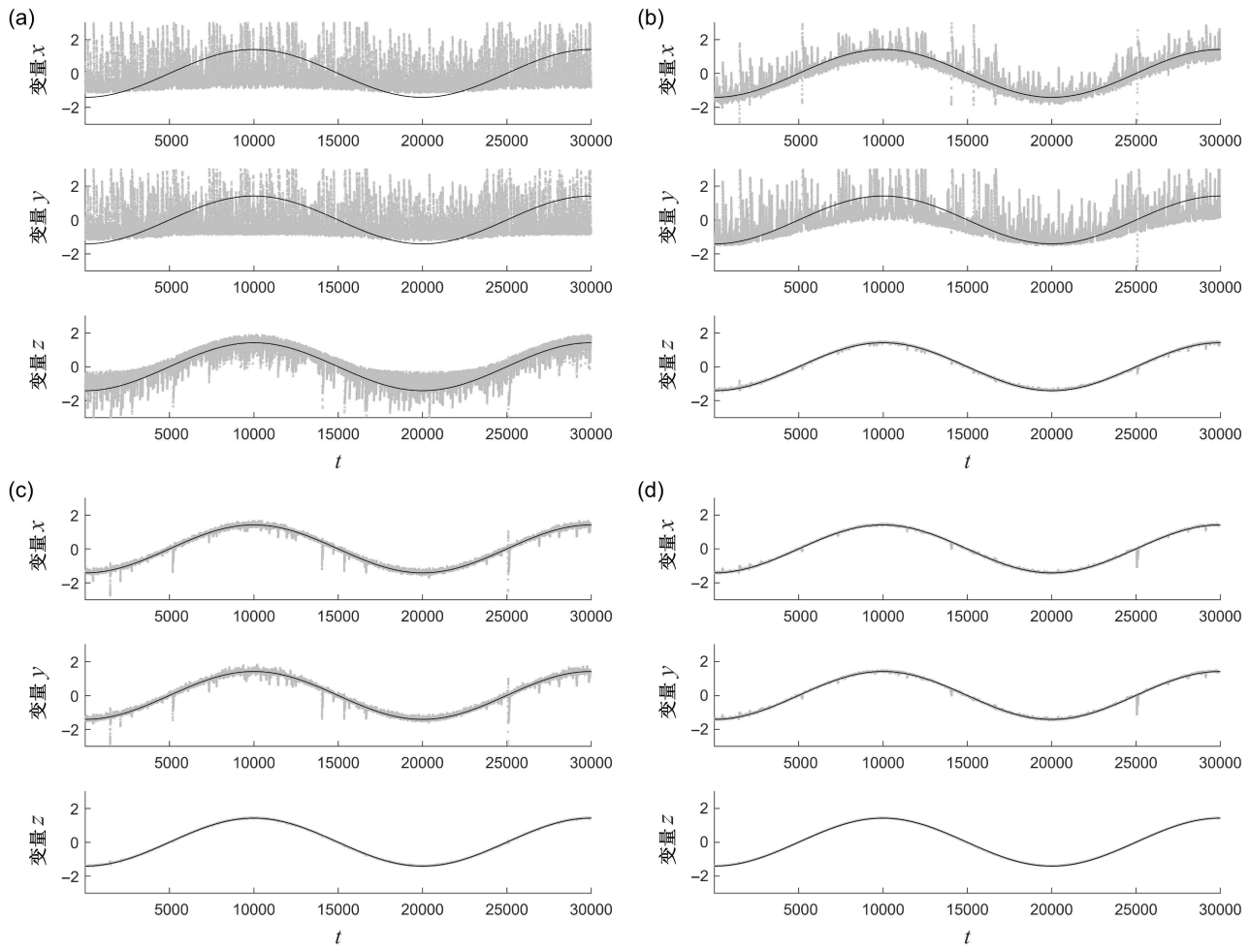

图 1　在周期型外强迫作用下，变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号。（a）m = 10；（b）m = 23；（c）m = 30；（d）m = 60

Fig. 1　SFA (Slow Feature Analysis) extraction test of variables x, y, and z under the periodic external forcing, where the gray scatter is the SFA extracted signal and the black solid is the real forcing signal. (a) Embedding dimesion m = 10; (b) m = 23; (c) m = 30; (d) m = 60

可以发现，3 个变量的 SFA 提取强迫信息均能和真实强迫信号相对应（图 1c、1d）。同时发现，当 m 取值在 20～25 范围时，提取信号和真实信号间的相关系数将显著提高，增大嵌入维数 m 可以有效的使分析出的强迫信号更加贴近于真实强迫信号且使得信号曲线更加平滑。在取较大的嵌入维数 m 时，其相关系数均能达到 0.99 以上（图 2）。

当把强迫换至作用在 x 上时$\sigma=10+\cos(t\pi/1000)$, $\beta=8/3$, $\rho=28$，可以得到相同的结论，但相比于强迫作用在 y 上时，需要用更大的嵌入维数 m，才能从中提取出较好的结果。但当强迫作用在 z 上时 $\sigma=10$, $\beta=8/3+\cos(t\pi/1000)$, $\rho=28$，仅需要较小的 m 就能从 3 个变量中提取出真实强迫的特征。这说明对于变量间存在相互作用的系统，对任意单一变量的外强迫作用，其强迫信息会嵌入于系统当

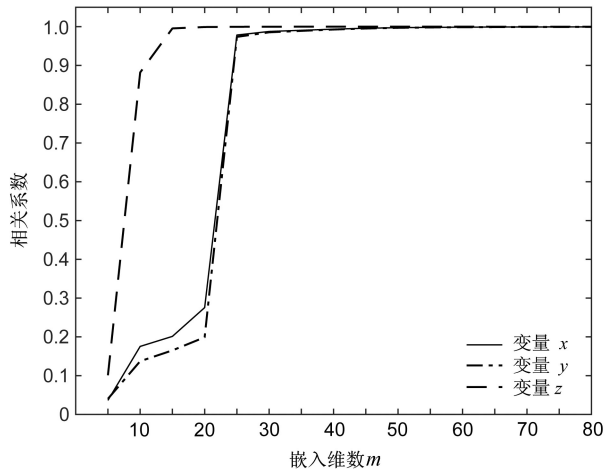

图 2　不同嵌入维数 m 下，变量 x、y、z 的 SFA 提取信号与真实强迫信号之间的相关系数（周期型强迫）

Fig. 2　Correlation coefficients between the SFA extracted signal and real forcing signal of variables x, y, and z with different embedding dimensions m (under the periodic external force)

中，借由 SFA 算法，可以从任意变量中提取出真实的外强迫信号。但对于不同的作用方式，SFA 提取时所选取的最小嵌入维数 m 不同。虽然选取较大的嵌入维数 m 能提高外强迫信息的提取水平，但所需的计算时间也会显著增长，这就需要更加谨慎的考虑。

3.2　减弱的周期型强迫试验

当考虑减弱的强迫作用，在 3.1 节中对变量 y 作用的基础上，减弱外强迫信号的振幅，令 $\rho = 28 + 0.05\cos(t\pi/1000)$，另外两个参数仍保持不变 $\sigma = 10, \beta = 8/3$。可以发现 SFA 的提取效果将有所降低，提取出的外强迫信号中的高频波动更加显著，同时相比于 3.1 节，需要选取更大的嵌入维数 m 才能反应出真实强迫信号的特征（图 3），取 m=14 时，才首次从变量 z 的提取信号中发现真实强迫的周期特征。其中也有与 3.1 节所得出结论相同的部分：Lorenz 模型变量 z 对于强迫的响应最为敏感；选取更大的 m 可以显著提升提取效果。但当 m 增大到一定值时，对变量 x、y 的提取效果就基本不再提升（见图 3 c、3 d 及图 4），其提取信号和真实信号的相关系数随着 m 的增大收敛至 0.9 左右，而对 z 分析出的相关系数能达到 0.99 以上（图 4），由此可以说明，SFA 对外强迫的提取能力受限于真实强迫的大小和变量自身的因素，对于越强的驱动信号，提取效果越好；变量自身对强迫信息越敏感，SFA 提取能力越强。

为了进一步验证外强迫大小与 SFA 提取外强迫能力之间的关系，我们设计了如下试验，在周期

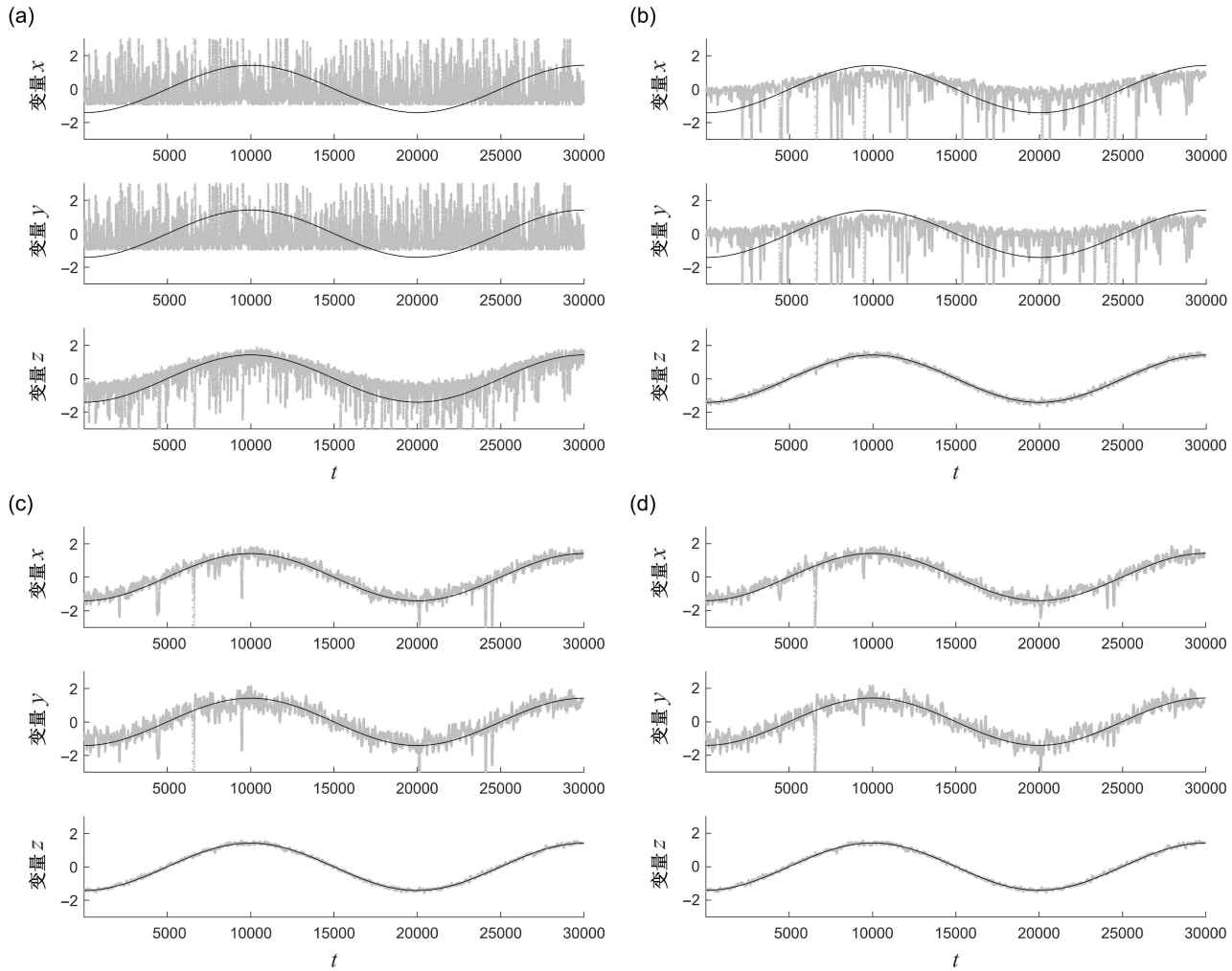

图 3　在减弱的周期型外强迫作用下变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号。（a）m=14；（b）m=50；（c）m=80；（d）m=100

Fig. 3　SFA extraction test of variables x, y and, z under the weaker periodic external forcing, where the gray scatter is the SFA extracted signal, and the black solid is the real forcing signal. (a) m = 14; (b) m = 50; (c) m = 80; (d) m = 100

型强迫的基础上$\gamma = 28 + b\cos(t\pi/1000)$，增加一个倍率系数 b，通过调整其大小来计算提取信号与真实强迫信号之间的相关系数。这里取嵌入维数 m=25，时滞参数 τ=1，倍率系数 b 在 0.1～1 变化。结果图 5 所示，由于 Lorenz 系统中变量 z 对于强迫信号十分敏感，在 0.1 倍率下所分析出的强迫信号已经和真实强迫信号相吻合，相关系数达到 0.99，这也与之前结果相一致；而对于变量 x、y 来说，其相关系数有着显著上升的趋势：在当倍率在 0.3～0.4 区间时，SFA 对变量 x 的提取效果显著提高，倍率在 0.4～0.5 区间时，SFA 对变量 y 的提取效果显著提高。这也反应出不同变量对这种真实强迫的大小的响应是有差异的，从总体上看，SFA 提取效果是与强迫信号大小成正相关，但并不是线性关系。

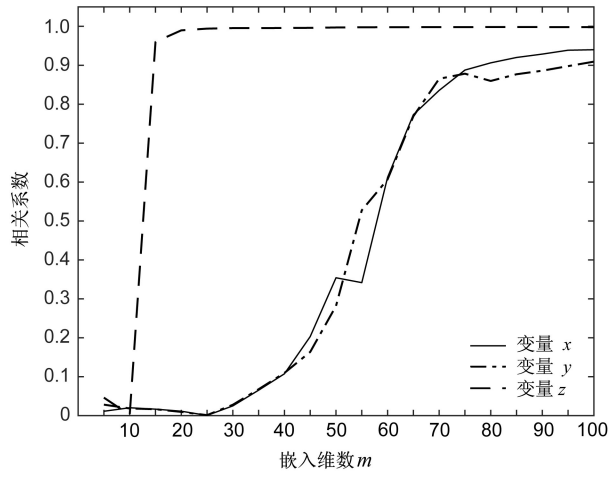

图 4　不同嵌入维数 m 下，变量 x、y、z 的 SFA 提取信号与真实强迫信号之间的相关系数（减弱的周期型强迫）

Fig. 4　Correlation coefficient between the SFA extracted signal and real forcing signal of variables x, y, and z under different embedding dimensions m (attenuated periodic force)

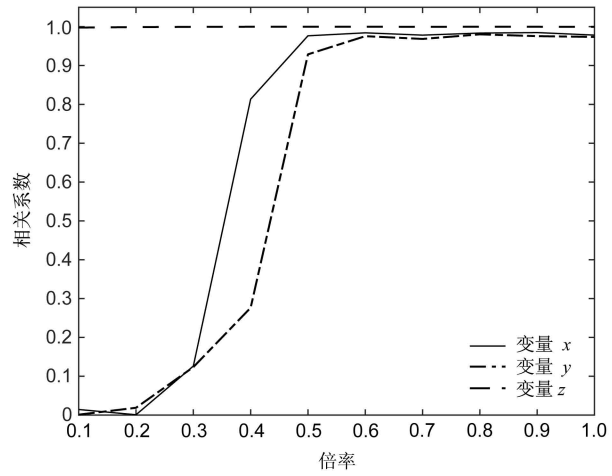

图 5　不同倍率下的周期型强迫试验中，变量 x、y、z 的 SFA 提取结果与真实强迫信号的相关系数（$m = 25, \tau = 1$）

Fig. 5　Correlation coefficient between the SFA extracted signal and real forcing signal of variables x, y, and z under the periodic external forcing with different rate coefficients b ($m = 25, \tau = 1$)

3.3　指数衰减型强迫试验

本节将考察对于没有周期特征的指数衰减型强迫，能否使用 SFA 方法进行提取。由 3.2 节我们得知，越弱的强迫信号越难提取，重构信号中虚假的高频波动显著，所以在设计本次试验时，对指数衰减的强迫信号适当放大处理，令$\rho = 28 + 10\,\mathrm{e}^{-t/2000}$, $\sigma = 10, \beta = 8/3$，同样的方式计算取点 80001 个，取后 30000 个点进行 SFA 分析。结果如图 6 所示，当指数衰减型的外强迫作用在 y 上时，仍然可以通过 SFA 从系统中将真实信号提取出来，即单调衰减的信号同样会在相互作用的变量间“扩散”，SFA 有能力从中反演出原始的强迫信号。同时 m 的增大有着平滑的作用，但对于较大的 m 所分析出的强迫信号，仍然存在小振幅的高频波动，与 3.2 节结果类似。

3.4　伴随指数衰减的周期型强迫试验

在 3.1 和 3.3 节的基础上，考虑更为复杂的驱动信号，在改变的 Lorenz 系统中加入伴随指数衰减的周期形式外强迫信号，令$\rho = 28 + \mathrm{e}^{-t/2000}\cos(t\pi/1000)$, $\sigma = 10, \beta = 8/3$，这种情况下，可以将其理解为一个有周期特征$\cos(\pi t/1000)$和一个仅单调变化$\mathrm{e}^{-t/2000}$的强迫同时作用在变量 y 中，此时的 SFA 分析将给出两个强迫的乘积变化，而不能单独提取出某一个强迫特征（图 7）。同样的，若再进一步增加外强迫的复杂程度，取$\rho = 28 + [5 + \cos(t\pi/1000)]$, $\sigma = 10, \beta = 8/3$，即两个周期函数以相乘的形式作用于 y 上，SFA 所分析出的外强迫与真实强迫信号$[5 + \cos(t\pi/500)][1 + \cos(t\pi/1000)]$一致，但并不能将两者分离（图 8）。同时也可以看出，对于衰减的强迫系统需要更大的嵌入维数 m 才能正确提取出外强迫信息。

3.5　噪声影响下的周期型强迫试验

真实的气候系统不是连续的，往往包含着大量的噪声，所以在讨论 SFA 对外强迫的提取能力时，也需要考虑到噪声的因素。在 3.1 节周期型强迫试验的基础上，在 y 的变化中添加随机扰动，取$\rho = 28 + \cos(t\pi/1000)$, $\dot{y} = \rho x - y - xz + \varepsilon(t)$，其余参数保持不变，$\sigma = 10, \beta = 8/3$。其中 $\varepsilon(t)$ 为在区间

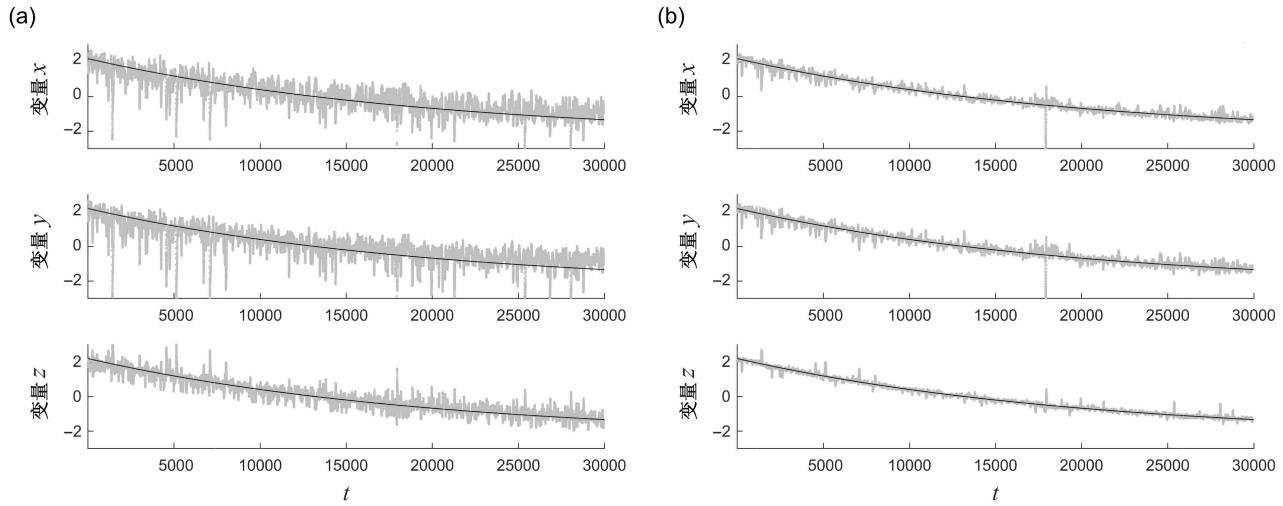

图 6　在指数衰减型的外强迫作用下，变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号。（a）m = 40；（b）m =70

Fig. 6　SFA extraction test of variables x, y, and z under the exponentially decaying external forcing, where the gray scatter is the SFA extracted signal, and the black solid is the real forcing signal. (a) m = 40; (b) m = 70

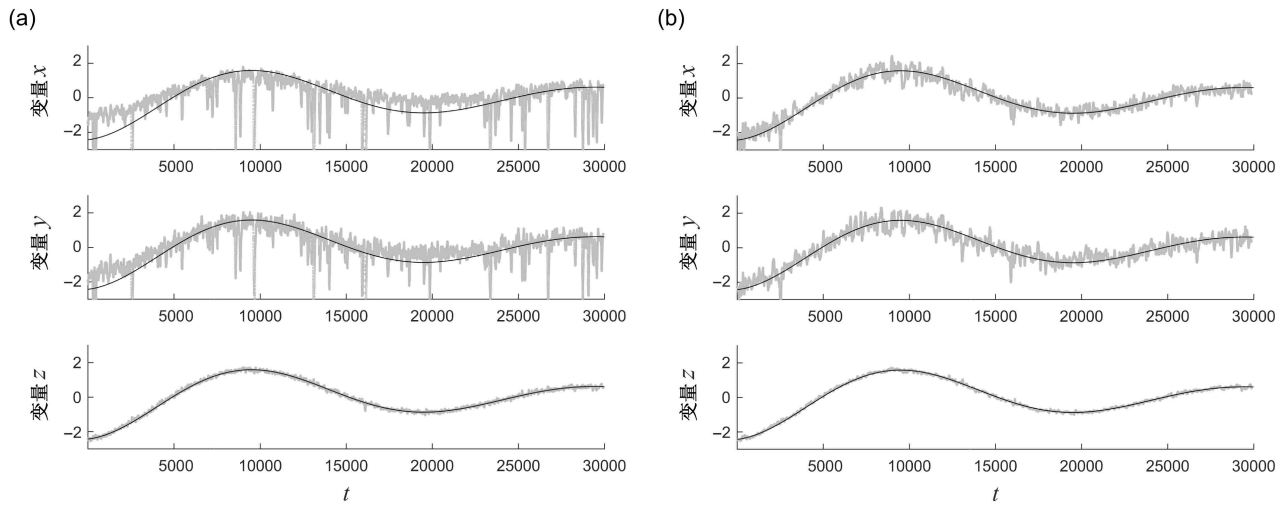

图 7　在伴随指数衰减的周期型外强迫作用下，变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号。（a）m = 70；（b）m = 120

Fig. 7　SFA extraction test of variables x, y, and z under the cyclic external forcing with exponential decay, where the gray scatter is the SFA extracted signal, and the black solid is the real forcing signal. (a) m = 70; (b) m = 120

[−10, 10] 满足均匀分布的白噪声。可以发现在嵌入维数 m=60 的时候，SFA 仍然能从有噪声干扰下的 Lorenz 系统中提取出原始外强迫信号（图 9），但所提取的强迫信号相比于无噪声干扰时（图 1d）存在明显的高频波动。对于变量 x、y 而言，提取信号与真实信号之间的相关系数在嵌入维数 m 落于区间 25～30 时快速增大，该区间要略大于无噪声影响下的结果，且相较于无噪声干扰，有噪声时所得出相关系数略低（当 m=30 时，有噪声时相关系数在 0.9 左右；无噪声时的相关系数达到 0.99），说明噪声在嵌入维数 m 取值较低时的影响更加明显，会在提取信号中叠加更强的虚假的高频波动。变量 z 对强迫的作用更加敏感，因而噪声的影响并不显著，能以较小的嵌入维数来反演出真实的强迫信号，当 m 取值在 15 左右，其相关系数就达到了 0.99（图 10）。

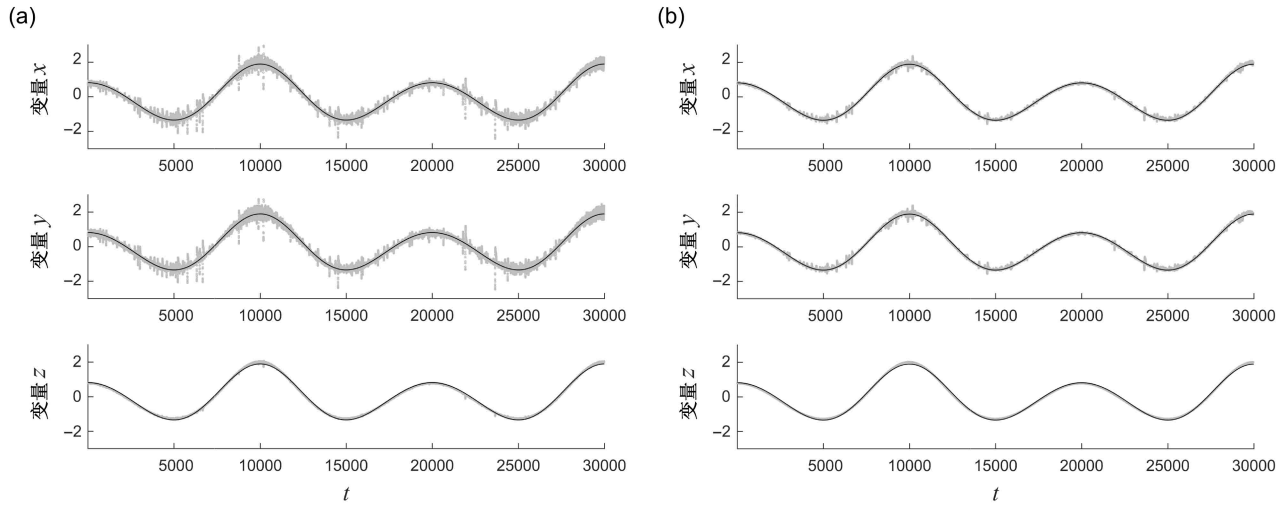

图 8 在双周期函数乘积形式的外强迫作用下，变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号。（a）$m = 20$；（b）$m = 40$

Fig. 8 SFA extraction experiment of variables x, y, and z under the external forcing of the product of the two-periodic function, where the gray scatter is the SFA extracted signal, and the black solid is the real forcing signal. (a) $m = 20$; (b) $m = 40$

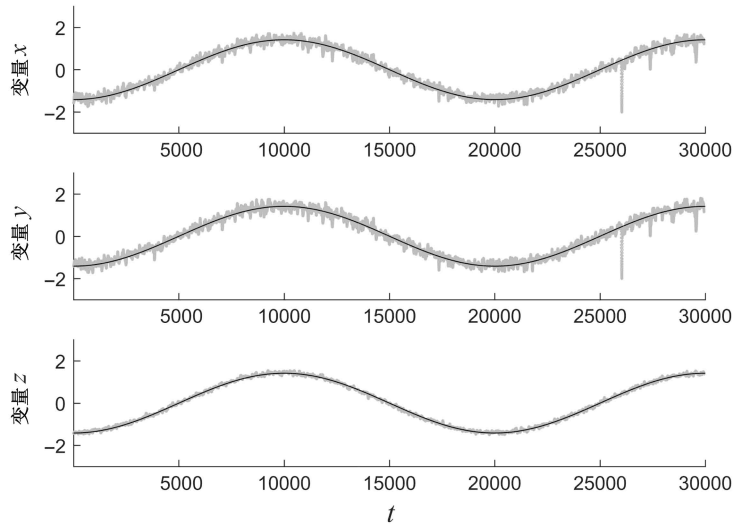

图 9 m=60 时，噪声干扰下，周期型外强迫变量 x、y、z 的 SFA 提取试验，其中灰色散点为 SFA 提取信号，黑色实线是真实强迫信号

Fig. 9 SFA extraction test of variables x, y, and z of the periodic external forcing under noise interference, m = 60, the gray scatter is the SFA extracted signal, and the black solid is the real forcing signal

4 结论与讨论

本文通过 SFA 分析方法对改变的 Lorenz 进行分析，试图分析该方法对多维连续系统的驱动信号的反演能力，初步结果如下：

（1）Lorenz 模型中对于作用在任意单一变量上的外强迫，其特征会嵌入整个系统空间中，通过 SFA 分析，可以在任意与该变量有相互作用的其他变量中将外强迫信息恢复出来。且系统中（公式 1）变量 z 对于强迫信号最为敏感。

（2）对于单一的指数衰减或周期型的强迫信号，慢特征分析能够成功地将其从系统中提取出来，但提取的效果与信号的强弱有关。越弱的强迫信号越难提取，提取所需的最小嵌入维数越大，且提取信号中虚假的高频波动越显著。

（3）对于多种形式的强迫信号以乘积的形式作用于 Lorenz 系统中，慢特征分析能提取出乘积后整体的信号，而不能直接分离出独立的强迫信号。而在日后的研究中，对于周期特征显著的提取信号，可以尝试结合小波分析、滤波等方法对其

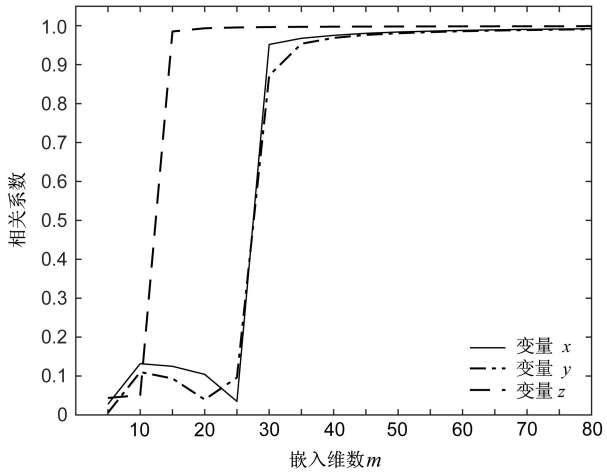

图 10　噪声干扰下，取不同的嵌入维数 m 时，变量 x、y、z 的 SFA 提取信号与真实信号的相关系数（周期型外强迫）

Fig. 10　Correlation coefficients between the SFA extracted signal and real signal of variables x, y, and z (periodic external forcing) under noise interference, when different embedding dimensions m are taken

分离。

（4）慢特征分析可以在有噪声干扰的情况下对 Lorenz 系统进行外强迫提取，但噪声会影响 SFA 提取的准确性。当嵌入维数取值较小时，噪声会使得提取结果中出现高频波动。

（5）慢特征分析提取的效果不仅和强迫信号的强度、噪声有关，也和其参数嵌入维数 m 有关。一般来说，嵌入维数的增大能有效提高提取效果，减少提取信号中的高频波动，使提取信号更加接近真实外强迫。但过大的嵌入维数会使得计算耗时显著增加，所以需要谨慎选取。

以上结果表明，SFA 慢特征分析方法在多维、连续的非平稳系统中（以改变的 Lorenz 系统为例）能够有效地提取驱动力信息。但对于真实的气候系统而言，时间序列往往还受到资料长度的限制和大量噪声的干扰，这将显著影响 SFA 的分析结果。值得注意的是，作用在 Lorenz 系统中任意变量上的外强迫，可以从其他的变量中提取出来，这说明外强迫信号会在系统中相互作用的变量之间传递，若推广至真实的气候系统，是否能从不同的物理量所分析出的外强迫信号中发现相同的影响因子，这值得继续探讨。另外，本文并没有给出时滞参数 τ 的讨论，在本次试验中，结果显示仅在 τ=1 的情况下，SFA 能够成功提取出真实强迫，而在实际应用中，τ 的选取主要依靠经验与尝试，所以如何更加科学地选取时滞参数还需要进一步的研究；而对于实际应用中嵌入维数 m 的选择，可以适当增大 m。需要注意的是，过大的 m 会使得计算时间增大；同时当系统受到多种不同周期尺度的强迫时（强迫可以是作用在系统中不同的变量），嵌入维数 m 的变化对 SFA 提取效果的影响还没有得到深入讨论，所以在实际应用中仍需尝试不同的 m 来讨论其对结果的影响。真实大气中，还存在着多种不同尺度的驱动力作用在气候系统的问题，如何将分析出的信号分离并且与实际物理意义相结合，并从中分析影响气候变化的物理驱动机制，也是一个研究的重要方向。

参考文献（References）

Berkes P, Wiskott L. 2005. Slow feature analysis yields a rich repertoire of complex cell properties [J]. Journal of Vision, 5(6): 579−602. doi:10.1167/5.6.9

陈潇潇, 王革丽, 金莲姬. 2015. 包含外强迫因子的大气气溶胶数浓度的预测 [J]. 中国环境科学, 35(3): 694−699.　Chen Xiaoxiao, Wang Geli, Jin Lianji. 2015. Prediction of the atmospheric aerosol number concentration using a new predictive technique [J]. China Environmental Science (in Chinese), 35(3): 694−699.

范开宇, 王革丽, 李超, 等. 2018. 利用慢特征分析法提取二维非平稳系统中的外强迫特征 [J]. 气候与环境研究, 23(3): 287−298.　Fan Kaiyu, Wang Geli, Li Chao, et al. 2018. Extracting the driving force signal from two-dimensional non-stationary system based on slow feature analysis [J]. Climatic and Environmental Research, 23(3): 287−298.

蒋昕祎, 李绍军, 金宇辉. 2018. 基于慢特征重构与改进 DPLS 的软测量建模 [J]. 华东理工大学学报 (自然科学版), 44(4): 535−542.　Jiang Xinyi, Li Shaojun, Jin Yuhui. 2018. Soft sensor modeling based on enhancing DPLS and slow feature reconstruction [J]. Journal of East China University of Science and Technology (Natural Science Edition), 44(4): 535−542. doi:10.14135/j.cnki.1006-3080.20170829006

Konen W, Koch P. [2009-06-20]. How slow is slow? SFA detects signals that are slower than the driving force [EB/OL]. http://arxiv.org/abs/0911.4397v1

Lorenz E N. 1963. Deterministic nonperiodic flow [J]. J. Atmos. Sci, 20(2): 130−141. doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2

马奎俊, 韩彦军, 陶卿, 等. 2011. 基于核的慢特征分析算法 [J]. 模式识别与人工智能, 24(2): 153−159.　Ma Kuijun, Han Yanjun, Tao Qing, et al. 2011. Kernel-based slow feature analysis [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 24(2): 153−159. doi:10.3969/j.issn.1003-6059.2011.02.001

Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, et al. 1980. Geometry from a time series [J]. Physical Review Letters, 45(9): 712−716. doi:10.1103/PheRevLett.45.712

潘昕浓, 王革丽, 杨培才. 2017. 利用慢特征分析法提取层次结构系

统中的外强迫 [J]. 物理学报, 66(8): 080501. Pan Xinnong, Wang Geli, Yang Peicai. 2017. Extracting the driving force signal from hierarchy system based on slow feature analysis [J]. Acta Physica Sinica, 66(8): 080501. doi:10.7498/aps.66.080501

宋世凯. 2017. 全球变暖背景下 1960~2014 年中国降水时空变化特征 [D]. 新疆大学博士学位论文. Song Shikai. 2017. Spatial and temporal variation characteristics of precipitation over China during 1960-2014 under global warming [D]. Ph. D dissertation (in Chinese), Xinjiang University.

Takens F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence [M]//Rand D, Young L S. Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980, Berlin Heidelberg: Springer, 366–381. doi:10.1007/BFb0091924

Tsonis A A. 1996. Widespread increases in low-frequency variability of precipitation over the past century [J]. Nature, 382(6593): 700−702. doi:10.1038/382700a0

Turner R, Sahani M. 2007. A maximum-likelihood interpretation for slow feature analysis [J]. Neural Computation, 19(4): 1022−1038. doi:10.1162/neco.2007.19.4.1022

Verdes P F, Granitto P M, Navone H D, et al. 2001. Nonstationary time-series analysis: Accurate reconstruction of driving forces [J]. Physical Review Letters, 87(12): 124101. doi:10.1103/PhysRevLett.87.124101

Wang G L, Yang P C, Zhou X J. 2013. Nonstationary time series prediction by incorporating external forces [J]. Adv Atmos Sci, 30(6): 1601−1607. doi:10.1007/s00376-013-2134-z

Wiskott L, Seinowski T J. 2002. Slow feature analysis: Unsupervised learning of invariances [J]. Neural Computation, 14(4): 715−770. doi:10.1162/089976602317318938

杨培才, 卞建春, 王革丽. 2003. 气候系统的层次结构和非平稳行为: 复杂系统预测问题探讨 [J]. 科学通报, 48(19): 2148−2154. Yang Peicai, Bian Jianchun, Wang Geli. 2003. Hierarchy and nonstationarity in climate systems: Exploring the prediction of complex systems [J]. Chinese Science Bulletin, 48(19): 2148−2154. doi:10.3221/j.issn:0023-074X.2003.13.023

Zhang F, Yang P C, Fraedrich K, et al. 2017. Reconstruction of driving forces from nonstationary time series including stationary regions and application to climate change [J]. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 473: 337−343. doi:10.1016/j.physa.2016.12.088